LIVIU VUC
CONSTANTIN MILICI
IULIU DIMOIU
NICOLAE RACHIN

MODELE MATEMATICE ÎN PROIECTAREA CONSTRUCȚIILOR

EDITURA FACLA

Scanned with OKEN Scanner

LIVIU VUC
CONSTANTIN MILICI
IULIU DIMOIU
NICOLAE RACHIN

MODELE MATEMATICE ÎN PROIECTAREA CONSTRUCŢIILOR

Scanned with OKEN Scanner

Redactor : ION ILIN
Tehnoredactor : IOAN I. IANCU

Bun de tipar : 27.08.1981.
Apărut 1981.
Coli tipar : 13,5.

Întreprinderea poligrafică „Banat"
Timișoara, Calea Aradului nr. 1.
Comanda nr. 87.

Scanned with OKEN Scanner

LIVIU VUC
CONSTANTIN MILICI
IULIU DIMOIU
NICOLAE RACHIN

MODELE MATEMATICE ÎN PROIECTAREA CONSTRUCŢIILOR

EDITURA FACLA
TIMIŞOARA, 1981

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

În condițiile extinderii considerabile a cadrului de aplicare a matematicii moderne în toate domeniile de cercetare științifică, legate de sporirea eficienței economice, sarcinile trasate de Congresul al XII-lea al P.C.R. impun utilizarea metodelor de optimizare.

Cartea de față își propune să prezinte într-un mod unitar și accesibil principalele aspecte ale acestei teorii în domeniul proiectării construcțiilor.

Problemele care apar de obicei în fața proiectanților sînt atît de complexe încît procedeele bazate pe intuiție, experiență și simț practic au devenit nesatisfăcătoare. Fantezia proiectantului este pusă în evidență de modul în care soluționează problema ce o are spre rezolvare, alegînd din multitudinea de soluții posibile pe acea care corespunde cel mai bine scopului propus, a cărei realizare este simplă, economică și oferă siguranță maximă în timpul folosirii ei. Căutarea soluției optime s-a practicat prin procedeul elementar al selectării din cîteva variante posibile. Dar mulțimea acestor variante posibile nu putea fi explorată cu acest procedeu costisitor și ineficace.

Dacă se ține însă seama de marea diversitate de posibilități în vederea rezolvării unei anumite probleme, metodele de calcul vin de fapt în ajutorul proiectantului, oferindu-i posibilitatea să selecționeze automat pe cele mai corespunzătoare scopului propus. De aceea, o proiectare tehnică modernă este cu atît mai plină de fantezie cu cît soluția adoptată pentru rezolvarea ei este mai studiată, iar cunoștințele care s-au folosit mai noi, mai recente, în domeniile care concură la această înfăptuire.

Scanned with OKEN Scanner

Ultimele decenii evidențiază constituirea într-o disciplină matematică distinctă a preocupărilor privind optimizarea în procesul de proiectare — matematica proiectării —, al cărui obiect se declină în obținerea automată a optimului global și condițiile de realizare a lui.

Literatura de specialitate confirmă supozițiile anterioare prin apariția unui număr foarte mare de articole și lucrări destinate domeniului proiectării optimale.

Prezentul volum s-a axat pe îmbinarea tratării matematice riguroase a problemelor de optimizare cu exemple concrete, foarte frecvente, din practica proiectării. Volumul nu acordă o atenție deosebită unor rezultate numerice, cît mai ales principiilor generale de abordare, întocmirii modelelor matematice (exemplificare la obiect precis) și modul lor de rezolvare (convexe, neconvexe, stochastice, simulare analogică simulare numerică). Referitor la tehnicile de calcul, în funcție de natura și posibilitățile oferite de biblioteca calculatorului, lucrarea prezintă trimiteri bibliografice adecvate. Pe baza materialului ilustrat cititorul poate să facă legătura între realitatea concretă și modelele ilustrate.

Cartea se adresează inginerilor constructori, studenților din ultimii ani ai Facultății de construcții, precum și specialiștilor interesați în problemele de optimizare.

Autorii aduc mulțumiri tuturor acelora care i-au sprijinit la apariția cărții.

Autorii

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

SISTEME DE CORPURI MATERIALE

1.1. MODELE ALE MATERIEI

În căutarea celor mai bune mijloace de cercetare și de cunoaștere a legilor, caracteristice pentru obiectele fizice complicate, s-a elaborat metoda modelării. Esența acestei metode constă în înlocuirea obiectului real care interesează cu un alt obiect, mai comod pentru studiere, cercetare sau proiectare. După o astfel de înlocuire, nu se mai analizează obiectul primar, ci modelul.

Este clar că obiectul-model trebuie să reflecte într-o anumită măsură proprietățile și particularitățile obiectului primar.

Pentru ingineri, izvorul principal al cunoștințelor de specialitate s-a aflat în experiență. Fie I zona de realitate în care operează un inginer. Prin operația „experimentare" se ajunge la anumite date despre obiectul cercetat, (fig. 1.1), care apoi se verifică statistic.

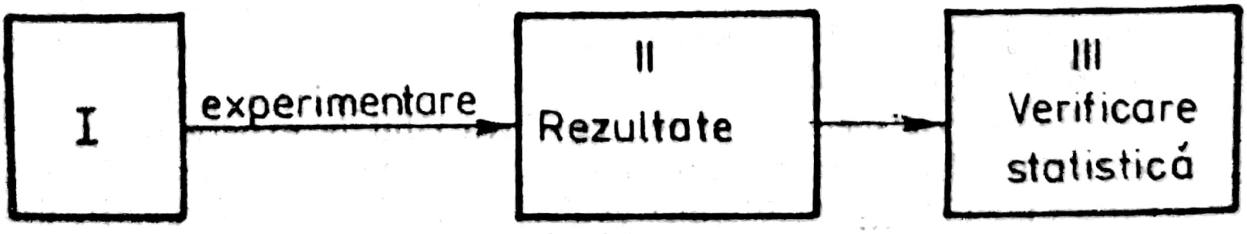


Fig. 1.1.

Scanned with OKEN Scanner

Deşi matematica a pătruns de foarte mult timp în proiectarea tehnică, o perioadă lungă de timp metodele analizei cantitative aplicate au avut un rol destul de modest. Acest lucru nu s-a datorat întîmplării sau intenţiilor rele ale unor ingineri conservatori, ci pur şi simplu nu erau încă maturizate condiţiile de folosire a matematicii şi nu a apărut deodată necesitatea utilizării, iar pe de altă parte, însăşi, matematica nu era pregătită pentru a pătrunde în noile ei domenii de aplicare. Acest lucru se poate şi începe să se realizeze efectiv în zilele noastre [21, 70, 120, 165, 168]. Ca de obicei, cerinţele practicii au condus la un salt în domeniul teoriei, adică la crearea bazei tehnico-materiale necesare pentru satisfacerea acestei necesităţi; astfel au apărut calculatoarele electronice. Numai odată cu apariţia lor, metodele cantitative au putut să capete o aplicare practică.

În zona I, relaţiile care trebuie să fie stabilite sînt în număr atît de mare încît este aproape imposibil să se realizeze toate combinaţiile experimentale posibile.

O definiţie exhaustivă pentru un model din această zonă ar permite o construcţie a obiectului pe baze axiomatice. Această idee a fost pusă pentru prima dată pentru disciplina de mecanică de către Hilbert şi este încă departe de a fi rezolvată, fie măcar pentru unele cazuri particulare [59, 129].

Din această cauză, etapele următoare constau în formularea matematică a problemei şi elaborarea modelului matematic, adecvat descrierii elaborate (fig. 1.2).

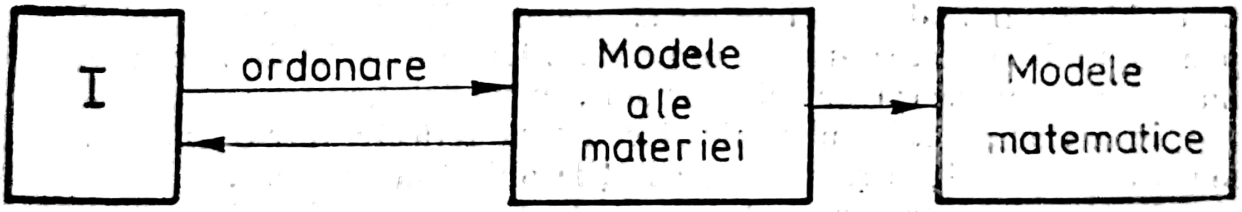


Fig. 1.2.

Greutăţile întîmpinate în acest caz sînt în general următoarele: dificultăţile în legătură cu traducerea textului scris din limbaj obişnuit în limbaj matematic; neajunsurile exprimării cantitative; greutăţile descrierii formalizate.

Faptul că specialistul recurge invariabil la experienţă pentru a-şi demonstra afirmaţiile, în vreme ce matematicianul demonstrează numai prin raţionamente şi calcule nu constituie două poziţii despărţite, dimpotrivă cele două metode se pot contopi (fig. 1.3).

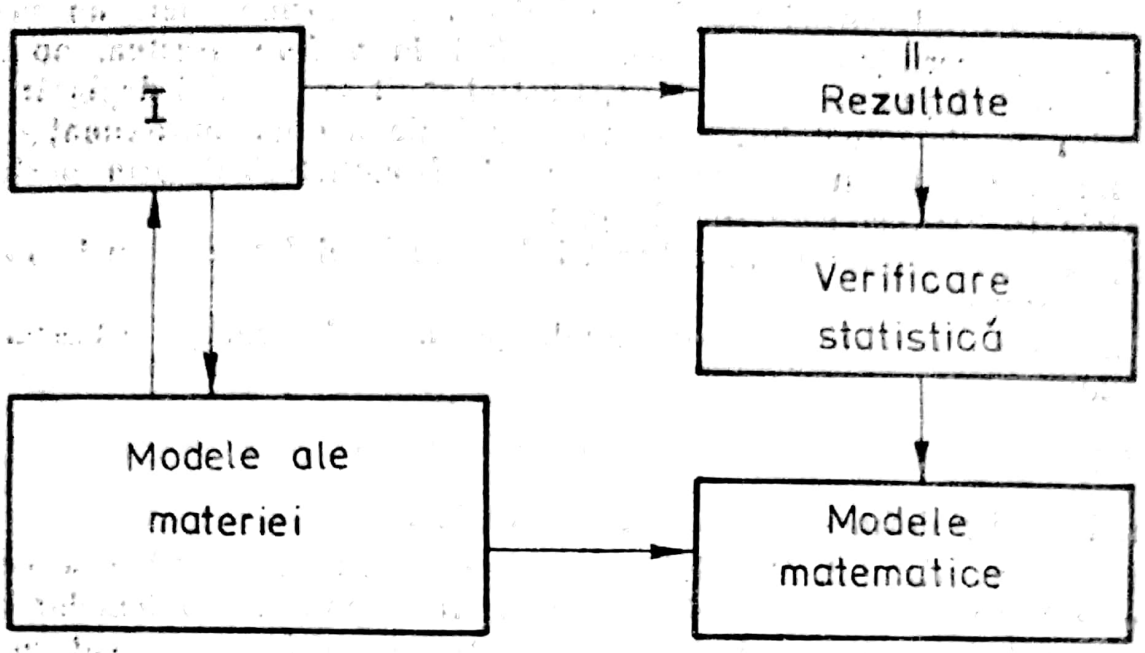


Fig. 1.3.

1.1.1. MODELUL CORPULUI RIGID (CR)

Corpul rigid constituie prima aproximație a unui model al materiei și poate fi caracterizat prin postulatele [171]:

P_1. Spațiul este euclidian (tridimensional).

P_2. Timpul este independent de coordonatele spațiale.

P_3. Legile lui Newton sînt valabile.

P_4. Orice domeniu elementar conține materie.

P_5. Corpul se află în echilibru, dacă și numai dacă forțele ce acționează asupra fiecăreia din părțile sale formează un sistem static echivalent cu zero.

Observația 1.1. În cadrul acestui model, orice corp se află în echilibru sau mișcare, după natura sarcinii aplicate și a legăturilor geometrice fără să-și schimbe forma [115].

1.1.2. MODELUL CORPULUI DEFORMABIL (CD)

În practică, corpurile sînt realizate din materiale uzuale (metal, lemn, beton). Fiind supuse la diferite sarcini, forma corpurilor se modifică. Dacă însă sarcina aplicată depășește anumite

Scanned with OKEN Scanner

limite, corpul considerat își schimbă astfel forma încît nu mai răspunde cerințelor de folosire. Avînd în vedere acestea, apare necesară adaptarea modelului CR astfel încît să permită deplasările reciproce ale punctelor. Aceasta constituie a doua aproximație a unui model al materiei, model ce poate fi caracterizat prin postulatele $P_1 \div P_5$, la care se adaugă :

P_6. Forțele interioare sînt funcții de poziție, deformație și temperatură.

P_7. Există următoarea corespondență între deformații și tensiuni [120] :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\left[1+\alpha\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{p-1}\right], \tag{1.1}$$

unde α și p definesc forma legii de variație.

Observația 1.2. Modelul $P_1 \div P_7$ este suficient pentru a permite tratarea cu mijloacele matematicii actuale a problemelor de rezistență, stabilitate și rigiditate pentru o cuprinzătoare categorie de corpuri ($p=1$ material elastic, $p=\infty$ material rigid plastic).

Observația 1.3. Modelul $P_1 \div P_7$ poate fi simplificat prin adăugarea următoarelor postulate :

P_8. Lucrul mecanic necesar pentru a deforma corpul depinde numai de starea inițială și starea finală a corpului.

P_9. Deformațiile sînt expresii diferențiale liniare de deplasările reciproce ale punctelor.

P_{10}. Tensiunile sînt funcții liniare de deformații.

P_{11}. Materialul se consideră izotrop (propietățile mecanice ale materialului nu variază).

Se va prezenta în continuare partea metodologică — cu totalitatea metodelor matematice prin care se poate descrie partea clasică a sistemelor arbitrare de bare sub o formă generală.

1.2. SISTEME ARBITRARE DE BARE

Formularea problemelor fundamentale din acest paragraf reprezintă o schemă abstractă pentru a putea da o caracterizare generală structurilor din bare cu modelele materiale descrise în paragraful anterior. Se consideră o structură arbitrară

$$S=(N,\ B), \tag{1.2}$$

unde $N=N_1 \cup N_2$ reprezintă mulțimea nodurilor (N_1 — mulțimea nodurilor între bare, N_2 — mulțimea nodurilor prin care se face legătura structurii cu reazemele), B fiind mulțimea barelor.

Observația 1.4. Dacă structura este continuă (grinzi-pereți, plăci curbe, plăci cutate, masive), $S=(N, B)$ reprezintă o schemă de discretizare. În cazul structurilor din bare (grinzi cu zăbrele, cadre etc.), (N, B) reprezintă chiar graful structurii.

Se presupune că structura $S=(N, B)$ este supusă la δ încărcări statice, luîndu-se în studiu μ variante ale încărcării și $N_1=\{s_1, s_2, \ldots, s_\alpha\}$, $N_2=\{l_1, l_2, \ldots, l_\beta\}$, $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_\gamma\}$. Vom nota

$$\mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu)=S. \tag{1.3}$$

Formalizarea matematică care se face în continuare se obține prin asocierea parametrilor q_i, $i=\overline{1, n}$ structurii S, parametri, care în mod natural sînt clasificați conform principiului cauzalității în modul următor, (fig. 1.4), [134] :

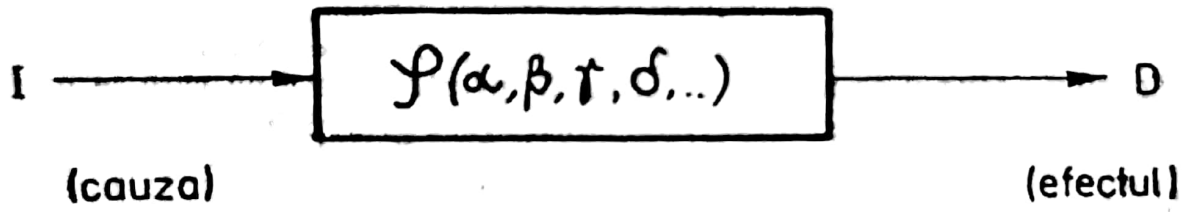


Fig. 1.4.

$$\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}=I \cup D. \tag{1.4}$$

$$I=\{x_1, x_2, \ldots, x_e\}, \qquad D=\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}.$$

Evoluția parametrilor $y_i \in D$ se face în corelație cu parametrii $x_i \in I$, conform unei legități fizice prin

$$(M)\begin{cases} L: I \to D \\ y=L(x). \end{cases}$$

Se spune că (M) constituie modelul matematic al structurii S, model prin care se caracterizează starea tensională a ei.

Observația 1.5. În cadrul mecanicii construcțiilor se aleg drept parametri independenți eforturi sau deplasări. Alegerea acestor parametri determină modul de aplicare concretă a rezolvării : metoda generală a eforturilor sau metoda generală a deplasărilor.

Cu aceste precizări se poate da următoarea definiție :

Definiția 1.1. Se numește sistem de bare și se notează prin $\mathcal{S}(S; M)$ modelul matematic M fizic realizabil printr-o structură orientată.

Analiza sistemelor $\mathcal{S}(S, M)$ se poate face dacă se ține cont de topologia sau starea sistemului.

Pentru definirea topologiei sistemului $\mathcal{S}(S, .)$, se va da mai întîi următoarea definiție.

Definiția 1.2. Sistemul $\mathcal{S}(S^1, .)$ se numește subsistem al sistemului $\mathcal{S}(S, .)$, dacă S^1 este un subgraf a lui S.

Presupunem că $\mathcal{S}(S, .)$ are p componente $\mathcal{S}(S^k, .)$, $k=\overline{1, p}$, supuse într-un anumit mod la legăturile

$$l_m = \{l_{ij} : i, j = \overline{1, q}\}, \tag{1.5}$$

care pot fi conform convențiilor intrate în uz în mecanica construcțiilor: reazem simplu, articulație, încastrare, reazem elastic etc. Se asociază sistemului $\mathcal{S}(S, .)$ următorul graf planar, [7], caracterizat, prin:

a) Nodurile sînt componentele sistemului.

b) Dacă între componentele $\mathcal{S}(S^i, .)$ și $\mathcal{S}(S^j, .)$ există o legătură, atunci se unește S^i și cu S^j printr-un arc pe care se marchează legătura existentă. Vom nota acest graf prin

$$\text{graf } \mathcal{S}(S, .) = (S, l_m). \tag{1.6}$$

Exemplul 1.1.

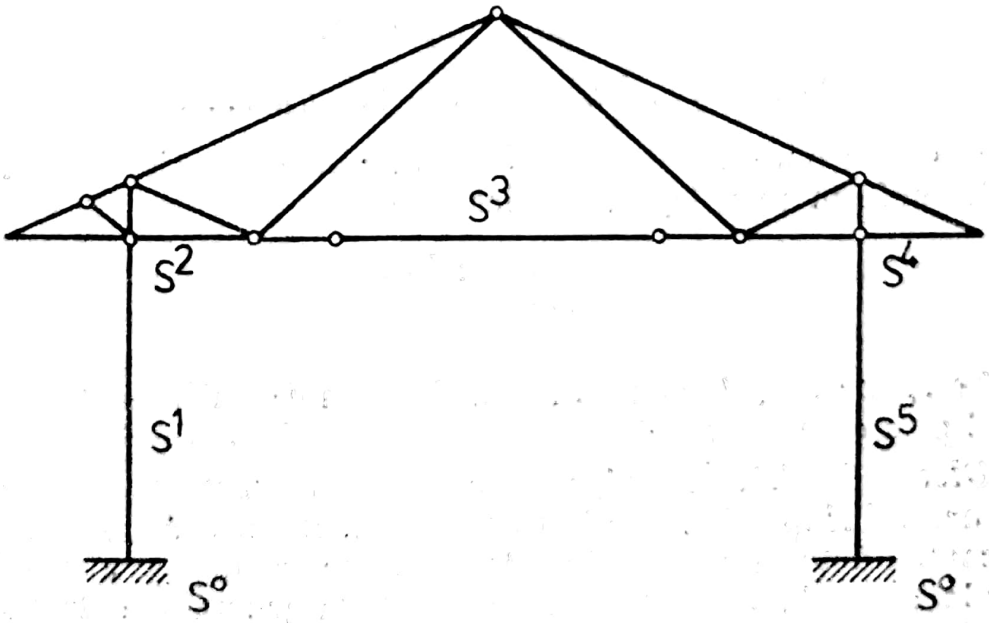


Fig. 1.5.

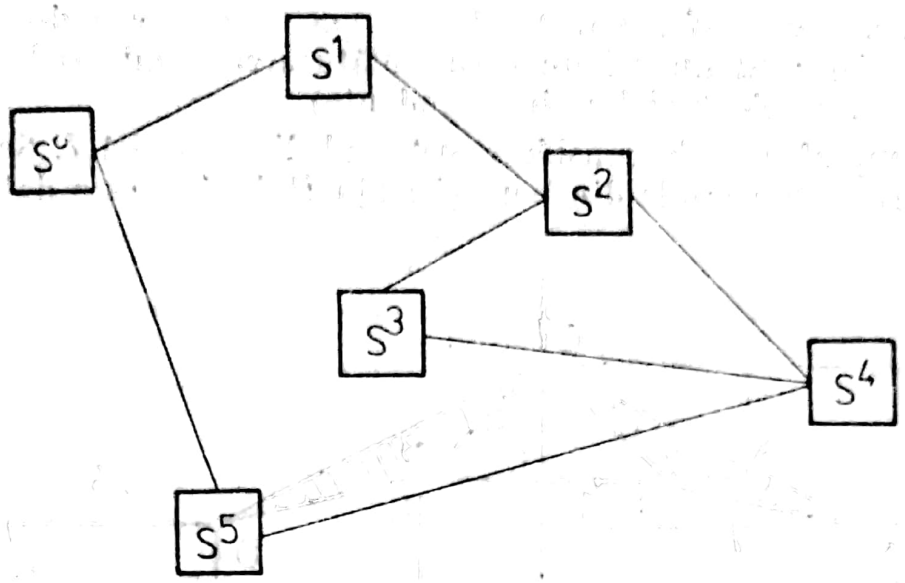


Fig. 1.6.

Graful (S, l_m) are următoarele proprietăţi, a căror demonstraţie se lasă în seama cititorului :

1. (S, l_m) este un graf neorientat.
2. (S, l_m) este conex.
3. Numărul ciclomatic al grafului este dat de relaţia

$$\nu \text{ (graf } \mathcal{S}(S, .)) = q - p + 1.$$

4. ν (graf $\mathcal{S}(S, .)$) este egal cu numărul maxim de cicluri independente. În felul acesta se disting următoarele cazuri :

a) ν (graf $\mathcal{S}(S, .)) = 0$, graful (S, l_m) este un arbore ;

b) ν (graf $\mathcal{S}(S, .)) = k$, graful (S, l_m) are k cicluri liniar independente.

5. Graful (S, l_m) admite un arbore parţial.

Cu aceste precizări, se poate trece acum la construirea modelului matematic al sistemului $\mathcal{S}(S, .)$ în următoarele cazuri.

I. Sistemul $\mathcal{S}(S, .)$ are modelul matematic CR. În acest caz conţinutul legii fizice este epuizat de invariabilitatea distanţelor şi unghiurilor. Modelul matematic se stabileşte folosind graful (S, l_m) în modul următor :

1. Dacă ν (graf $\mathcal{S}(S, .)) = 0$, starea de echilibru a sistemului se determină după cum urmează [7] :

a) Se consideră ca rădăcină a arborelui reazemele (batiul).

b) Se va porni din ramurile cele mai îndepărtate de rădăcina arborelui, din aproape în aproape, izolînd subsistemele şi scriind acele ecuaţii de echilibru care nu introduc în calcul nici una din forţele de legătură.

2. Dacă ν (graf $\mathcal{S}$ $(S, .))=k$, atunci cazul se reduce la cel anterior, formînd un arbore (prin înlăturarea a cîte o latură din fiecare $\mathcal{S}$ din cele k cicluri independente).

Exemplul 1.2. Se consideră sistemul din figura 1.7. Se cere să se determine tensiunile din bare şi forţa P dacă F este dată.

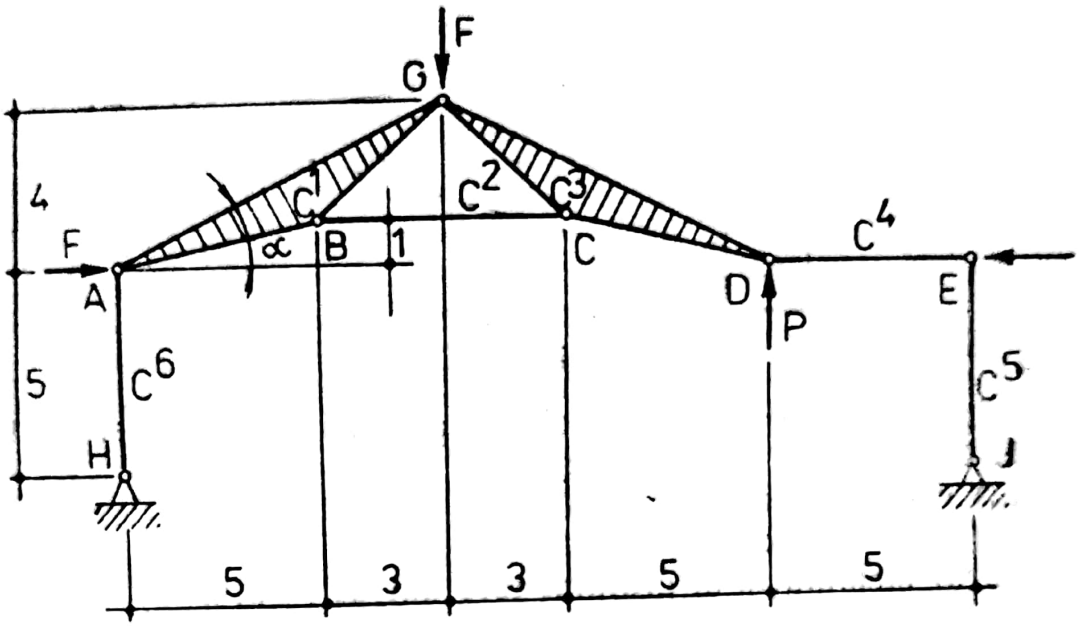


Fig. 1.7.

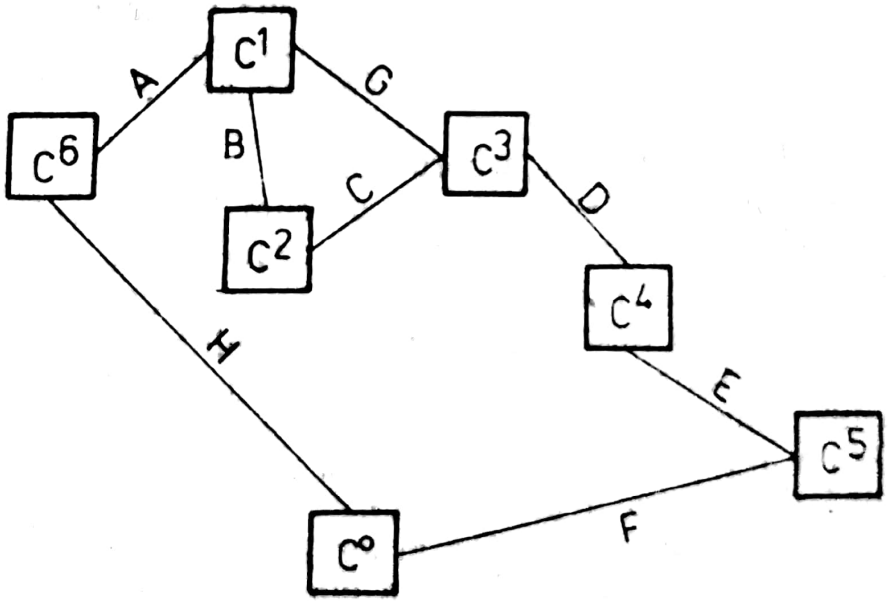


Fig. 1.8.

(graf $\mathcal{S}$ $(S, .))=8-7+1=2$ cicluri independente.

Arborele obținut este :

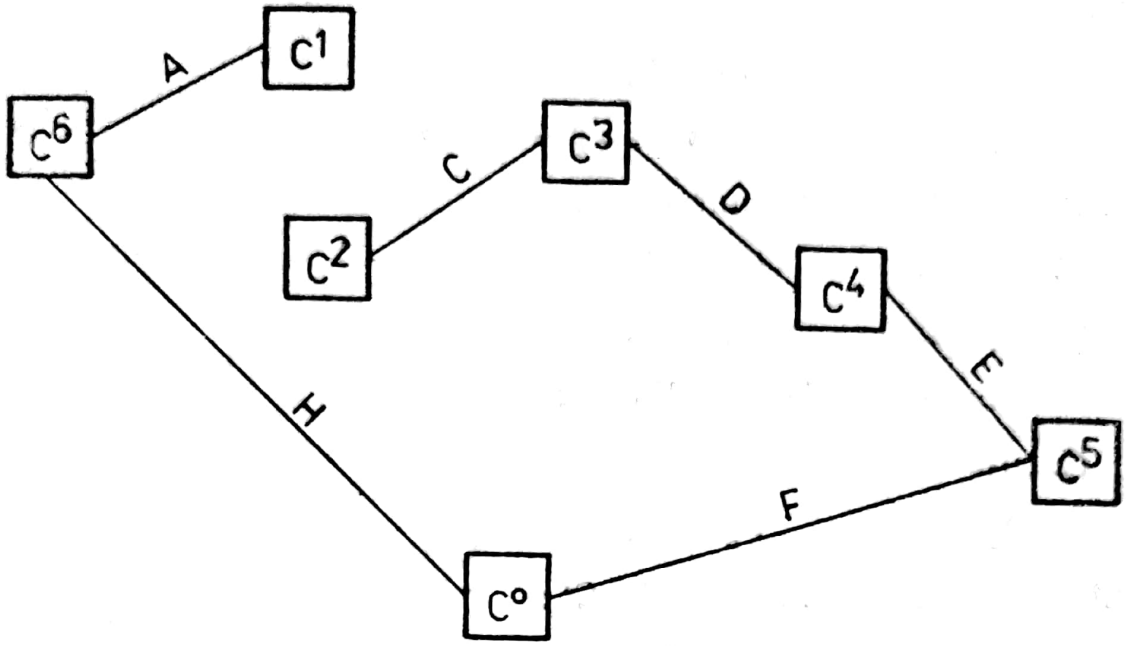


Fig. 1.9.

Se vor scrie acum ecuațiile de echilibru :

a) Pentru sistemul format din C^1 față de legătura A :

$\Sigma M_A=0,$ $\quad 8(V_G+F)+4H_G+H_B+5V_B=0.$

b) Pentru sistemul format din C^1 și C^6 față de legătura H :

$\Sigma M_H=0,$ $\quad 8(V_G+F)+9H_G+6H_B+5V_B+5F=0.$

c) Pentru sistemul format din C^2 față de legătura C :

$\Sigma M_C=0,$ $\quad V_B=0.$

d) Pentru sistemul format din C^2 și C^3 față de legătura D :

$\Sigma M_D=0,$ $\quad 8(V_G-F)-4H_G+11V_B-H_B=0.$

e) Pentru sistemul format din C^2, C^3, C^4 :

$\Sigma M_J=0,$ $\quad 13(V_G-F)-5P+16V_B-6H_B=0.$

f) Pentru sistemul format din C^2, C^3, C^4, C^5 :

$\Sigma M_J=0,$ $\quad 13(V_G-F)-9H_G+16V_B-6H_B+$
$+5P-5F=0.$

Scanned with OKEN Scanner

Se aplică în continuare metoda izolării subsistemelor și se scriu ecuațiile de echilibru pentru proiecțiile forțelor. Pentru subsistemul format din C^1:

$$(\Sigma x)_1=0, \qquad H_G+H_B+F-H_A=0$$

$$(\Sigma y)_1=0, \qquad F+V_G+V_B-V_A=0.$$

Pentru subsistemul format din C^6:

$$(\Sigma x)_6=0, \qquad H_A=H_H$$

$$(\Sigma y)_6=0, \qquad V_A=V_H.$$

Pentru subsistemul format din C^2:

$$(\Sigma x)_2=0, \qquad H_B=H_C$$

$$(\Sigma y)_2=0, \qquad V_B=V_C.$$

Pentru subsistemul format din C^3:

$$(\Sigma x)_3=0, \qquad H_C+H_G-H_D=0$$

$$(\Sigma y)_3=0, \qquad -F+V_G+V_C-V_D=0.$$

Pentru subsistemul format din C^4:

$$(\Sigma x)_4=0, \qquad H_D-H_E=0$$

$$(\Sigma y)_4=0, \qquad -V_D-P-V_E=0.$$

Pentru subsistemul format din C^5:

$$(\Sigma x)_5=0, \qquad H_E+F-H_J=0$$

$$(\Sigma y)_5=0, \qquad -V_E-V_J=0.$$

II. Sistemul $\mathcal{S}(S, .)$ are modelul material CD $(p=1, \alpha=0)$. În acest caz legea fizică constituie forma dependenței dintre câmpul deformațiilor și cel al tensiunilor. Se va arăta în continuare că starea tensională a sistemului poate fi studiată ca un fenomen fizic, dacă se examinează următoarele aspecte: static, geometric și fizic.

Pentru o analiză generală a laturii staticii, fie $\mathcal{S}^k$ un element al sistemului $\mathcal{S}(S, .)$, caracterizat prin parametrii arătați în fig. 1.10 și fig. 1.11.

Observația 1.6 Vectorii care constituie baza unui sistem de referință pot fi definiți după diverse convenții. În acest paragraf se va folosi convenția din fig. 1.10 și fig. 1.11.

Scanned with OKEN Scanner

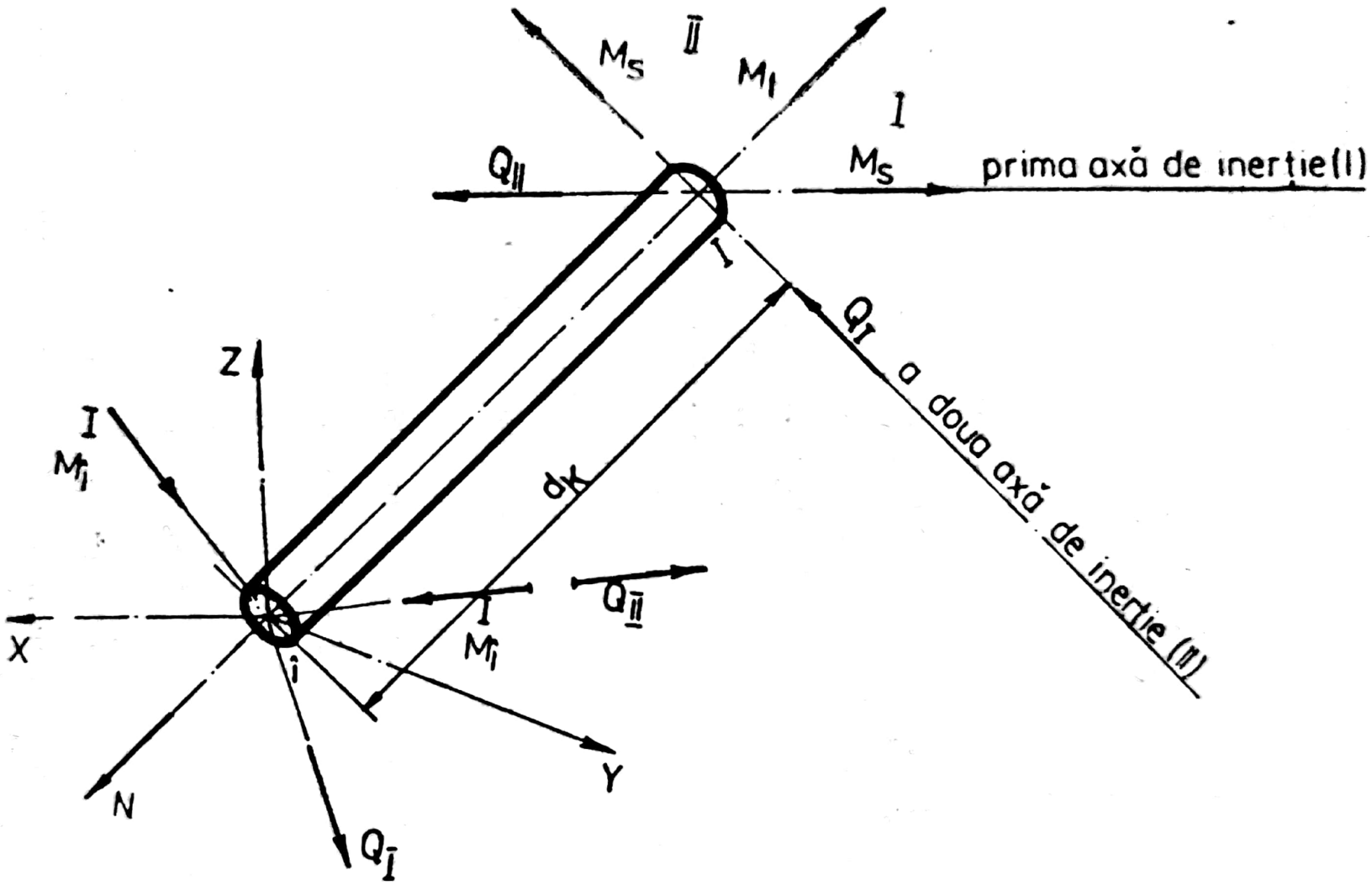


Fig. 1.10.

Scanned with OKEN Scanner

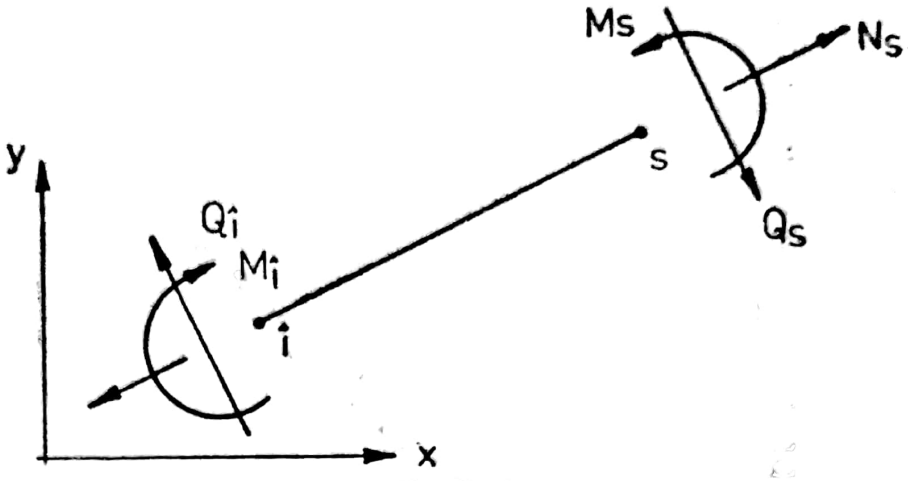


Fig. 1.11.

Pentru a scrie ecuațiile de echilibru pentru sistemul $\mathcal{S}(S,)$ se introduc ca și în [81, 135] următoarele matrici:

Matricile coordonatelor nodurilor

$$X=(x_1, x_2, \ldots, x_{\beta+\alpha})$$

(1.7) $$Y=(y_1, y_2, \ldots, y_{\beta+\alpha})$$

$$Z=(z_1, z_2, \ldots, z_{\beta+\alpha}).$$

Matricea lărgită a îmbinărilor

$$I^l = \| a_{ij} \|,$$

(1.8) $$a_{ij}=\begin{cases} -1, \text{ dacă nodul } i \text{ este începutul barei } j, \\ 1, \text{ dacă nodul } i \text{ este sfîrșitul barei } j, \\ 0, \text{ în toate celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Matricea îmbinărilor I formată din primele α linii ale matricei I^l

Din matricea I se pot nominaliza următoarele submatrici:

(1.9) $$\hat{I}=\| a_{ij}^{+} \|; \quad \tilde{I}=\| a_{ij}^{-} \|,$$

(1.10) $$a_{ij}^{+}=\begin{cases} a_{ij}, & \text{dacă } a_{ij}=+1 \\ 0, & \text{dacă } a_{ij}\neq+1, \end{cases}$$

(1.11) $$a_{ij}^{-}=\begin{cases} a_{ij}, & \text{dacă } a_{ij}=-1 \\ 0, & \text{dacă } a_{ij}\neq-1. \end{cases}$$

Observația 1.7. Matricele $\hat{I}$ și $\tilde{I}$ conțin informații în legătură cu poziția capetelor barelor.

Indicatorii joantelor :

(1.12) $$J_N = \| \varphi_N^1, \varphi_N^2, \ldots, \varphi_N^\gamma \| ,$$

(1.13) $$\varphi_N^j = \begin{cases} 1, & \text{dacă bara a } j\text{-a din condițiile prinderii poate prelua forța axială,} \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

(1.14) $$J_i = \| \varphi_i^1, \varphi_i^2, \ldots, \varphi_i^\gamma \| ,$$

(1.15) $$\varphi_i^j = \begin{cases} 1, & \text{dacă începutul barei a } j\text{-a este îmbinat rigid cu nodul corespunzător,} \\ 0, & \text{dacă îmbinarea este articulată.} \end{cases}$$

(1.16) $$J_s = \| \varphi_s^1, \varphi_s^2, \ldots, \varphi_s^\gamma \|,$$

(1.17) $$\varphi_s^j = \begin{cases} 1, & \text{dacă sfîrșitul barei a } j\text{-a este îmbinat rigid cu nodul corespunzător,} \\ 0, & \text{dacă îmbinarea este articulată.} \end{cases}$$

(1.18) $$J_A = \| \varphi_A^1, \varphi_A^2, \ldots, \varphi_A^{\alpha+\beta} \| ,$$

$\varphi_A^j = 0$ dacă nodul al j-lea este o articulație completă.

1. Operația notată cu $[\cdot]$ aplicată unei matrici linie (coloană) transformă această matrice într-o matrice diagonală.

2. Operația notată cu $\sqrt[*]{\ }$ și aplicată matricei $\lambda = \| a_{ij} \|$ de dimensiuni $r \times s$, transformă această matrice într-o altă matrice de aceleași dimensiuni, dar avînd elementele $\sqrt{a_{ij}}$.

3. Operația $*^2$ aplicată matricei λ o transformă într-o matrice de aceleași dimensiuni cu elementele a_{ij}^2.

4. Se consideră matricea linie F cu elementele 1 și 0 plasate în ordine arbitrară și de dimensiuni $1 \times s$. Cifra 1 este conținută de s_1 ori $s_1 < s$. Prin operația $\perp$ aplicată matricilor λ și F se obține matricea $B = \lambda \perp F$ de dimensiuni $r \times s$ excluzînd din λ coloanele cu aceleași numere ca și coloanele cu elemente zero din F.

5. Operația $\top$ se definește analog operației $\perp$, cu deosebirea că se elimină linii din λ.

Operațiile definite mai sus permit construirea următoarelor matrici :

Matricea lungimilor barelor

(1.20) $$L = \left[\sqrt[*]{(X.I)^{*2} + (Y.I)^{*2} + (Z.I)^{*2}} \right].$$

Matricea nodurilor articulate J_A poate fi obținută din I, J_N, J_S.

Încărcările aplicate pe sistemul $\mathcal{S}$ (α, β, γ, δ, 1) pot fi notate sub forma:

$$P=\left\|\begin{matrix} P_q \\ P_M \end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_{M_x} \\ P_{M_y} \\ P_{M_z} \end{matrix}\right\|; \tag{1.19}$$

unde P_x, P_y, P_z sînt matricele alcătuite cu proiecțiile pe cele trei axe ale încărcărilor din noduri, iar P_{M_x}, P_{M_y}, P_{M_z} sînt matricele conținînd proiecțiile momentelor încovoietoare aplicate în noduri pe cele trei axe. Matricea P_x se explicitează sub forma

$$P_x=\left\|\begin{matrix} P^x_{1,1} & P^x_{1,2} \ldots P^x_{1,\delta} \\ P^x_{2,1} & P^x_{2,2} \ldots P^x_{2,\delta} \\ P^x_{\alpha,1} & P^x_{\alpha,2} \ldots P^x_{\alpha,\delta} \end{matrix}\right\|.$$

Celelalte matrici sînt alcătuite în mod similar.

Pentru scrierea unitară a ecuațiilor, se definesc următoarele operații cu matrici [163].

Matricele diagonale a cosinușilor directori față de:

a) sistemul de axe de referință

$$\alpha_x=[X\dot{I}^lL^{-1}]; \quad \alpha_y=[Y\dot{I}^lL^{-1}]; \quad \alpha_z=[Z\dot{I}^lL^{-1}]. \tag{1.21}$$

b) sistemul axelor de inerție principale, fig. 1.10, 1.11:

Axa de inerție I—I

$$\beta_x=-\omega^{-1}\,(\delta\alpha_y+\sqrt[*]{1-\delta^2}\alpha_x\alpha_z), \tag{1.22}$$

$$\beta_y=\omega^{-1}\,(\delta\alpha_x-\sqrt[*]{-\delta^2}\,\alpha_y\alpha_z), \tag{1.23}$$

$$\beta_z=\omega\sqrt[*]{1-\delta^2}, \tag{1.24}$$

unde:

$$\omega=\sqrt[*]{\alpha_x^2+\alpha_y^2},$$

iar δ conține informații în legătură cu orientarea axelor principale de inerție

$$(1.25) \qquad \delta = \begin{Vmatrix} \delta_1 & & & & \\ & \delta_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \delta_\gamma \end{Vmatrix}; -1 \leqslant \delta_i \leqslant 1\ ;\ i=\overline{1,\ \gamma}.$$

Axa de inerție II—II

$$(1.26) \qquad \gamma_x = \omega^{-1}\left(\sqrt{1-\delta^2}\alpha_y - \delta\right),$$

$$(1.27) \qquad \gamma_y = -\omega^{-1}\left(\sqrt{1-\delta^2}\alpha_x - \delta\right),$$

$$(1.28) \qquad \gamma_z = \delta\omega.$$

Cu aceste precizări, ecuațiile de echilibru pentru sistemul $\mathcal{S}$ (α, β, γ, δ, 1) în cazul general se scrie :

$$(1.29) \qquad B \cdot S = P,$$

unde P este dat de (1.19), B este precizat de (1.31), iar S se exprimă prin :

$$(1.30) \qquad S = \begin{Vmatrix} N & \top J_N \\ M_1^{\mathrm{I}} & \top J_1^{\mathrm{I}} \\ M_s^{\mathrm{I}} & \top J_s^{\mathrm{I}} \\ M_1^{\mathrm{II}} & \top J_1^{\mathrm{II}} \\ M_s^{\mathrm{II}} & \top J_s^{\mathrm{II}} \\ M_{s,t} & \top J_{s,t} \end{Vmatrix}.$$

Din cazul general analizat se pot obține următoarele cazuri particulare :

1. Sistemul $\mathcal{S}$ (α, β, γ, δ, 1) are toate nodurile rigide. Matricea B se simplifică la expresia (1.32).

2. Sistemul $\mathcal{S}$ (α, β, γ, δ, 1) este o grindă cu zăbrele. Atunci B are forma :

$$B = \begin{Vmatrix} I & [X.\dot{I}^i \cdot L^{-1}] \\ I & [Y.\dot{I}^i \cdot L^{-1}] \\ I & [Z.\dot{I}^i \cdot L^{-1}] \end{Vmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} \dot{I}\alpha_x \perp J_N & -\dot{I}\gamma_x L^{-1} \perp J_l^{\mathrm{I}} & \dot{I}\gamma_x L^{-1} \perp J_s^{\mathrm{I}} & \dot{I}\beta_x L^{-1} \perp J_l^{\mathrm{II}} & -\dot{I}\beta_x L^{-1} \perp J_s^{\mathrm{II}} & 0 \\ \dot{I}\alpha_y \perp J_N & -\dot{I}\gamma_y L^{-1} \perp J_l^{\mathrm{I}} & \dot{I}\gamma_y L^{-1} \perp J_s^{\mathrm{I}} & \dot{I}\beta_y L^{-1} \perp J_l^{\mathrm{II}} & -\dot{I}\beta_y L^{-1} \perp J_s^{\mathrm{II}} & 0 \\ \dot{I}\alpha_z \perp J_N & -\dot{I}\gamma_z L^{-1} \perp J_s^{\mathrm{I}} & \dot{I}\gamma_z L^{-1} \perp J_s^{\mathrm{I}} & \dot{I}\beta_z L^{-1} \perp J_l^{\mathrm{II}} & -\dot{I}\beta_z L^{-1} \perp J_s^{\mathrm{II}} & 0 \\ 0 & \tilde{\dot{I}}\beta_x \perp J_s^{\mathrm{I}} & \hat{\dot{I}}\beta_x \perp J_s^{\mathrm{I}} & \tilde{\dot{I}}\gamma_x \perp J_l^{\mathrm{II}} & \hat{\dot{I}}\gamma_x \perp J_s^{\mathrm{II}} & \dot{I}\alpha_x \perp J_{s,t} \\ 0 & \tilde{\dot{I}}\beta_y \perp J_l^{\mathrm{I}} & \hat{\dot{I}}\beta_y \perp J_s^{\mathrm{I}} & \tilde{\dot{I}}\gamma_y \perp J_l^{\mathrm{II}} & \hat{\dot{I}}\gamma_y \perp J_s^{\mathrm{II}} & \dot{I}\alpha_y \perp J_{s,t} \\ 0 & \tilde{\dot{I}}\beta_z \perp J_l^{\mathrm{I}} & \hat{\dot{I}}\beta_z \perp J_s^{\mathrm{I}} & \tilde{\dot{I}}\gamma_z \perp J_l^{\mathrm{II}} & \hat{\dot{I}}\gamma_z \perp J_s^{\mathrm{II}} & \dot{I}\alpha_z \perp J_{s,t} \end{bmatrix}, \tag{.31}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$
B=\begin{bmatrix}
\dot{I}\alpha_x & -I\gamma_x L^{-1} & \dot{I}\gamma_x L^{-1} & \dot{I}\beta_x L^{-1} & -\dot{I}\beta_x L^{-1} & 0 \\
\dot{I}\alpha_y & -I\gamma_y L^{-1} & \dot{I}\gamma_y L^{-1} & \dot{I}\beta_y L^{-1} & -\dot{I}\beta_y L^{-1} & 0 \\
\dot{I}\alpha_z & -I\gamma_z L^{-1} & \dot{I}\gamma_z L^{-1} & \dot{I}\beta_z L^{-1} & -\dot{I}\beta_z L^{-1} & 0 \\
0 & \tilde{I}\beta_x & \hat{I}\beta_x & \tilde{I}\gamma_x & \hat{I}\gamma_x & \dot{I}\alpha_x \\
0 & \tilde{I}\beta_y & \hat{I}\beta_y & \tilde{I}\gamma_y & \hat{I}\gamma_y & \dot{I}\alpha_y \\
0 & \tilde{I}\beta_z & \hat{I}\beta_z & \tilde{I}\gamma_z & \hat{I}\gamma_z & \dot{I}\alpha_z
\end{bmatrix}. \tag{1 32}
$$

Scanned with OKEN Scanner

3) Sistemul $\mathcal{S}$ (α, β, γ, δ, 1) este plan. În acest caz se constată ușor că (1.31) devine

$$B=\begin{Vmatrix} \dot{I}\alpha_x \perp J_N & -\dot{I}\alpha_y L^{-1} \perp J_t & \dot{I}\alpha_y L^{-1} \perp J_s \\ \dot{I}\alpha_y \perp J_N & \dot{I}\alpha_x L^{-1} \perp J_t & -\dot{I}\alpha_x L^{-1} \perp J_s \\ 0 & (\tilde{I} \top J_A) \perp J_t & (\hat{I} \top J_A) \perp J_s \end{Vmatrix},$$

iar pentru noduri rigide (1.32) devine

$$B=\begin{Vmatrix} \dot{I}\alpha_x & -\dot{I}\alpha_y L^{-1} & \dot{I}\alpha_y L^{-1} \\ \dot{I}\alpha_y & \dot{I}\alpha_x L^{-1} & -\dot{I}\alpha_x L^{-1} \\ 0 & \tilde{I} & \hat{I} \end{Vmatrix}.$$

Observația 1.8. Dependențele geometrice se obțin din ecuațiile diferențiale ale barelor. Deoarece nu fac obiectul acestei lucrări, se trimite cititorul interesat la bibliografie.

Exemplul 1.3. [168]. Se vor pune în evidență dependențele geometrice în cazul din fig. 1.12

$$\chi_{12}=\frac{3\theta}{l_1}\,;\ \chi_{10}=-\frac{4\theta}{l_2}+\frac{q\,l_2^2}{12\,E\,I_2}\,;\ \chi_{01}=\frac{2\theta}{l_2}+\frac{q\,l_2^2}{12\,E\,I_2}.$$

Observația 1.9. În cazul $p=1$; $\alpha=0$ pentru exemplul din fig. 1.12, dependențele fizice au forma:

$$M_{12}=\chi_{12}EI_1\,;\ M_{10}=\chi_{10}EI_2\,;\ M_{01}=\chi_{01}EI_2.$$

Pentru precizarea modelului matematic, se consideră, fără a influența generalitatea, ferma spațială $\mathcal{S}$ (α, β, k, s, m) de n ori static nedeterminată, la care intervin și încărcările: greutatea proprie a componentelor, tensiunea preliminară a componentelor, precum și influența temperaturii [168].

Cu aceste precizări ecuațiile de stare vor include:

a) **Ecuațiile echilibrului**

$$(1.33)\quad \underset{(q\times k)}{A}\ \underset{(k\times m)}{S} = \underset{(q\times s)}{B}\ \underset{(s\times m)}{(P} + \underset{(s\times 1)}{G}\ \underset{(1\times m)}{I)}$$

unde: $q=k-n$, S este matricea eforturilor necunoscute, A matricea coeficienților corespunzători, P matricea încărcării, G matricea greutății proprii a componentelor din $\mathcal{S}$, I matricea linie formată din cifre, 1, iar B matricea coeficienților corespunzători.

Scanned with OKEN Scanner

Observația 1.10. **În cazul în care nu se ia în considerare greutatea componentelor (sau pretensionarea lor), ecuația (1.33) se simplifică în modul următor:**

$$\underset{(q\times k)}{A}\ \underset{(k\times m)}{S} = \underset{(q\times s)}{B}\ \underset{(s\times m)}{P}\ . \tag{1.34}$$

b) Dependențele geometrice

$$\underset{(k\times m)}{D} = \underset{(k\times q)}{C}\ \underset{(q\times m)}{U} + \underset{(k\times 1)}{D_0}\ \underset{(1\times m)}{I}\ , \tag{1.35}$$

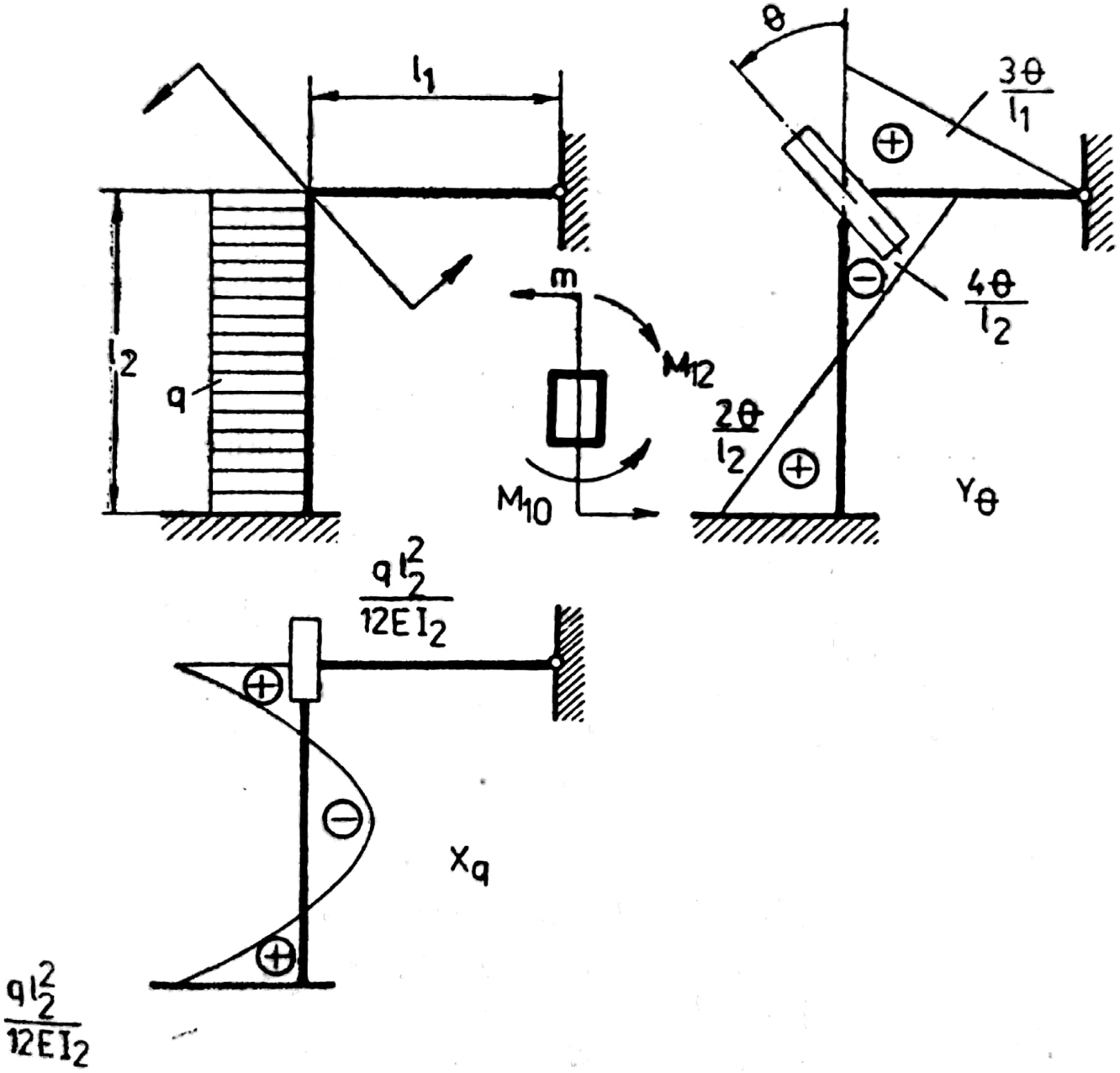


Fig. 1.12.

unde: D este matricea deformațiilor, U matricea deplasărilor, C matricea coeficienților corespunzători, iar D_0 este coloana lungimilor relative ale fiecărei bare care corespunde trecerii acesteia din starea nedeformată în acea stare care corespunde poziției inițiale stabile a fermei $\mathcal{S}$.

Observația 1.11. Dacă se consideră pretensionarea elementelor fermei, (1.35) va avea forma:

$$\underset{(k\times m)}{D} = \underset{(k\times q)}{C} \; \underset{(q\times m)}{U} \,. \tag{1.36}$$

e) **Ecuațiile fizice**

$$\underset{(k\times m)}{S} = \underset{(k\times k)}{E} \; \underset{(k\times k)}{F} \; \underset{(k\times m)}{D} - \underset{(k\times k)}{E} \; \underset{(k\times k)}{F} \; \underset{(k\times 1)}{t} \; \underset{(1\times m)}{e} \tag{1.37}$$

unde: E este modulul de elasticitate, α coeficientul dilatării termice, Δt variația de temperatură, F matricea diagonală formată din ariile secțiunilor transversale ale barelor.

Observația 1.12. Dacă nu se ia în considerare influența temperaturii, (1.37) devine:

$$\underset{(k\times m)}{S} = \underset{(k\times k)}{E} \; \underset{(k\times m)}{F} \; \underset{(k\times m)}{D} \,. \tag{1.38}$$

În sfîrșit, dacă se neglijează pretensionarea se obține ecuația următoare:

$$\underset{(k\times m)}{S} = \underset{(k\times k)}{E} \; \underset{(k\times m)}{F} \; \underset{(k\times m)}{D} \,. \tag{1.39}$$

În continuarea se partiționează matricile din ecuațiile de stare (1.34), (1.36), (1.39).

$$\underset{(q\times q)}{A_1} \; \underset{(q\times m)}{S_1} + \underset{(q\times n)}{A_2} \; \underset{(n\times m)}{S_2} = \underset{(q\times s)}{B} \; \underset{(s\times m)}{P} \,, \tag{1.40}$$

$$\begin{cases} \underset{(q\times m)}{D_1} = \underset{(q\times q)}{C_1} \cdot \underset{(q\times n)}{U} \\ \underset{(n\times m)}{D_2} = \underset{(n\times q)}{C_2} \cdot \underset{(q\times n)}{U} \,, \end{cases} \tag{1.41}$$

$$\begin{cases} \underset{(q\times m)}{S_1} = E \cdot \underset{(q\times q)}{F_1} \cdot \underset{(q\times m)}{D_1} \\ \underset{(n\times m)}{S_2} = E \; \underset{(n\times n)}{F_2} \; \underset{(n\times m)}{D_2} \,. \end{cases} \tag{1.42}$$

Scanned with OKEN Scanner

Eliminînd deplasările din (1.41) se obţine :

$$\underset{(q\times m)}{U} = \underset{(q\times q)}{C_1^{-1}} \underset{(q\times m)}{D_1} \tag{1.43}$$

$$\underset{(n\times m)}{D_2} = \underset{(n\times q)}{C_2} \cdot \underset{(q\times q)}{C_1^{-1}} \cdot \underset{(q\times m)}{D_1} . \tag{1.44}$$

Rezolvarea ecuaţiilor (1.42) în raport cu deformaţiile conduce la:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{(q\times m)}{D_1} = E \underset{(q\times q)}{F_1^{-1}} \underset{(q\times m)}{S_1} . \\ \underset{(n\times m)}{D_2} = E \underset{(n\times n)}{F^{-1}} \underset{(n\times m)}{S_2} . \end{array} \right. \tag{1.45}$$

Înlocuind în (1.44) pe (1.45) se obţine :

$$\underset{(n\times n)}{F_2^{-1}} \underset{(n\times m)}{S_2} = \underset{(n\times q)}{C_2} \underset{(q\times q)}{C_1^{-1}} \underset{(q\times q)}{F_1^{-1}} \underset{(q\times n)}{S_1} . \tag{1.46}$$

Folosind ecuaţia de echilibru se găseşte următoarea formă echivalentă :

$$S_1 = A_1^{-1}(B\cdot P - A_2 S_2). \tag{1.47}$$

Observaţia 1.13. Dacă se înlocuieşte (1.47) în (1.46) se obţine sistemul de ecuaţii din metoda forţelor pentru $m=1$.

Punînd (1.36) în (1.39) se găsesc eforturile exprimate prin deplasări :

$$S = E \quad F \quad C \quad U. \tag{1.48}$$

Observaţia 1.14. Înlocuirea lui (1.48) în (1.34) permite aflarea ecuaţiilor din metoda deplasărilor pentru $m=1$.

Observaţia 1.15. Dacă se înlocuiesc în (1.34) o parte a eforturilor funcţie de deplasări, alături de ecuaţiile rămase se obţine forma canonică a metodei mixte.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

SISTEME EXTREMALE ARBITRARE

2.1. SISTEME EXTREMALE MONOCRITERIALE

2.1.1. NOȚIUNI FUNDAMENTALE

Formalizarea unui proces de optimizare se poate face comod folosind fie spațiul stărilor, fie extremizînd unele performanțe ale sistemului considerat. Pentru precizarea acestor idei considerăm sistemul $\mathcal{S}$ (*ob. fizic, M*)

$$(M) \quad F(x(t),\ z(t),\ y(t))=0.$$

Fig. 2.1.

Vom defini:

1. **Funcția de performanță a sistemului**

(2.1) $P: S(I)\times S(D)\to R \quad \omega^{def}\ P(x(t),\ z(t),\ y(t))$

$S(I)=\{(x(t),\ z(t)) : (x(t),\ y(t),\ z(t))\in\mathcal{S}\ (ob.\ fizic,\ M)\}$

$S(D)=\{y(t) \quad : \quad (x(t),\ z(t),\ y(t))\in\mathcal{S}\ (ob.\ fizic,\ M)\}.$

2. Mulţimea performanţelor posibile ale sistemului

(2.2) $$\Delta \subset S(I) \times S(D) =$$

$$= \{(x(t),\ z(t),\ y(t)) : F_j(x(t),\ z(t),\ y(t))\ \{\geqslant, =, \leqslant\}\ 0\},\ j=1,\ m.\}$$

Performanţele sistemului $\mathcal{S}$ (*ob. fizic*, M) pot fi influenţate de :

a) variabilele de perturbaţie (notate prin $z(t)$),

b) modificarea parametrilor interni ai sistemului. De aceea orice modificare în structura lui (M) va trebui în aşa fel efectuată încît să corespndă unei modificări fizic realizabile.

Se va considera în cazul de faţă următoarea modificare a modelului (M)

$$y(t) = H(x(t),\ z(t),\ s(t_0))\ ;\ t \geqslant t_0,$$

în condiţiile :

a) Σ este spaţiul stărilor sistemului,

b) $s_0 \in \Sigma$ este o stare iniţială fixată,

c) evoluţia $(x(t),\ z(t))\ ;\ t \geqslant t_0$ determină în mod univoc starea sistemului $s(t)$ [134].

Avînd în vedere acestea, se constată următoarele :

(2.3) $$\omega = P(x(t),\ z(t),\ H((x(t),\ z(t),\ s_0)) = f(x(t),\ z(t)),$$

(2.4) $$F_j(x(t),\ z(t),\ H(x(t),\ z(t),\ s_0)) =$$
$$= f_j(x(t),\ z(t))\ \{\geqslant, =, \leqslant\}\}0,\quad j=\overline{1,\ m},$$

(2.5) $$\Delta = \{(x(t),\ z(t)) : f_j(x(t),\ z(t))\ \{\geqslant, =, \leqslant\}\ 0\ ;\ j=\overline{1,\ m}\}.$$

Definiţia 2.1. Se numeşte sistem extremal notat prin $\mathcal{S}$ (*ob. orientat*, E) modelul matematic

$$(E)\quad \begin{cases} f(x(t),\ z(t)) \to opt \\ f_j(x(t),\ z(t))\ \{\geqslant, =, \leqslant\}\ 0\ ;\ j=\overline{1,\ m} \end{cases}$$

fizic realizabil.

Definiţia 2.2. Se numeşte sistem extremal staţionar, sistemul extremal descris de următorul model :

$$(E_s)\quad \begin{cases} f[\lim\limits_{t\to\infty} x(t),\ \lim\limits_{t\to\infty} z(t)] = f(x,\ z) \to opt \\ f_j[\lim\limits_{t\to\infty} x(t),\ \lim\limits_{t\to\infty} z(t)] = f_j(x,\ z)\ \{\geqslant, =, \leqslant\}\ 0,\ j=\overline{1,\ m}. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 2.3. Se numește sistem extremal staționar discret, sistemul extremal cu modelul:

$$(E_d)\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{N} f_j(x_j)\\ \sum\limits_{p=1}^{N} f_{mp}(x)\leqslant K_m;\quad m=\overline{1,M}.\end{cases}$$

Dacă f_j și f_{mp} sînt liniare, se zice modelul matematic al unui sistem extremal liniar.

Observația 2.1. Trebuie remarcat faptul că variabila z (necomandată) are un caracter aleator, deci este definită pe un cîmp de probabilitate $\{\Omega, K, P\}$. În această situație se zice că sistemul $\mathcal{S}$ (*ob. orientat*, E) este stochastic cu condiții de risc, dacă z are o repartiție cunoscută sau stochastic cu incertitudini dacă variabila necomandată z nu are o repartiție cunoscută.

Modelul E în acest caz își pierde înțelesul, deoarece în mulțimea variabilelor aleatoare nu se poate stabili o relație de ordine. Problema care trebuie deci precizată este următoarea: prin ce model matematic se pot descrie sistemele stochastice? Răspunsul la această întrebare se obține din metodele de analiză adoptate, astfel:

1. Dacă se face o analiză „a posteriori", atunci funcțiile f și f_j au elemente bine precizate, ca atare sistemul are următorul model:

$$(E'_s)\begin{cases} f(x, z(\omega))\to opt\\ f_j(x, z(\omega))\ \{\geqslant, =, \leqslant\}\ 0;\ j=\overline{1,m};\ \omega\in\Omega.\end{cases}$$

2. Dacă se face o analiză „a priori", atunci va trebui să fie stabilite legile probabilistice ale variabilei aleatoare $f(x, z)$, deoarece valoarea optimului nu poate fi cunoscută anticipat.

Observația 2.2. Se înțelege prin *opt* funcție de natura sistemului unul din operatorii sup (inf) sau *max* (*min*).

Multe sisteme pot fi considerate ca un ansamblu de subsisteme în interacțiune. În această direcție se vor dezvolta două posibilități de cuplare a acestora: a) subsisteme cuplate în spațiu, b) subsisteme cuplate în timp.

Pentru a modela matematic sistemul rezultat prin cuplare în spațiu de subsisteme, se consideră

$I(j)=\{i$: rețeaua i este intrare pentru subsistemul $j\}$

$D(j)=\{i$: rețeaua i este ieșire a subsistemului $j\}$

și q_j un vector ale cărui componente sînt toate intrările în subsistemul j. Cu aceste precizări, fiecare subsistem poate fi descris prin următorul model matematic:

$$(M)\quad \begin{cases} x_i=f_i(q_j); & i\in D(j);\ j=\overline{1,r} \\ y_j=g_j(q_j); & j=\overline{1,r} \\ q_j\in A_j, & j=\overline{1,r} \end{cases}$$

(restricții asupra lui q_j, A_j precizîndu-se la problema propusă).

Se va asocia acum fiecărui subsistem j indicele de performanță:

$$\varphi_j(q_j)=P_j(q_j, y_j)=P_j(q_j, g_j(q_j)).$$

În aceste condiții, problema optimizării unui astfel de sistem poate fi caracterizată prin următorul model matematic:

$$F[P_1(q_1, g_1(q_1)) \ldots P_r(q_r, g_r(q_r)]\to opt$$

în raport cu

$$\begin{cases} x_i=f_i(q_j); & i\in D(j);\ j=\overline{1,r} \\ q_j\in A_j & j=\overline{1,r}. \end{cases}$$

Observația 2.3. Condițiile necesare și suficiente pentru ca x să fie soluție optimă a sistemului $\mathcal{S}(., E_i)$ depind de proprietățile funcțiilor f și f_j $(j=\overline{1,m})$. Astfel se disting următoarele tipuri de condiții:

a) Condiții de tip punct șa.

b) Condiții de tip Lagrange—Kuhn—Tucker.

Pentru detalii se poate consulta de exemplu [54].

Definiția 2.4. Se spune că sistemele $\mathcal{S}(., E)$ și $\mathcal{S}(., \tilde{E})$

$$(E)\begin{cases} f(x)\to min \\ x\in X \end{cases} \qquad (\tilde{E})\begin{cases} g(u)\to max \\ u\in U \end{cases}$$

sînt duale, dacă sînt îndeplinite condițiile

1) $f(x)\geqslant g(u)$ pentru $(\forall)\, x\in X$, $(\forall)\, u\in U$

2) $\min\limits_{x\in X} f(x)=\max\limits_{u\in U} g(u)$.

Observația 2.4. Dacă dualul modelului $\tilde{E}$ este E, se spune că dualitatea sistemelor este involutivă.

Fie X, U submulțimi din spații euclidiene, T spațiu metric și $f: X \times U \times T \to R$ continuă, q-concavă în raport cu x pentru $(u, t) \in U \times T$, q-convexă în raport cu u pentru $(x, t) \in X \times T$.

Se consideră sistemele $\mathcal{S}$ (., E_1) și $\mathcal{S}$ (., E_2)

$$(E_1) \begin{cases} \varphi(x, t) \to \sup \\ x \in X \end{cases} \qquad (E_2) \begin{cases} \psi(u, t) \to \inf \\ u \in U, \end{cases}$$

unde :

$$\varphi(x, t) = \inf_{u \in U} f(x, u, t), \quad \psi(u, t) = \sup_{x \in X} f(x, u, t)$$

$$X(t) = \{x : \varphi(x, t) = \sup_{x \in X} \varphi(x, t) ; \quad x \in X\}$$

$$U(t) = \{u : \psi(u, t) = \inf_{u \in U} \psi(u, t) ; \ u \in U\}.$$

Teorema 2.1. (dualitate). Dacă pentru orice punct limită $q \in T$ mulțimile $X(q)$, $U(q)$ sînt nevide și mărginite, atunci se poate găsi o vecinătate $V_q \subset T$ a punctului q astfel ca :

a) $(\forall)\ t \in V_q \Rightarrow X(t) \neq \emptyset$ și $U(t) \neq \emptyset$,

b) $\mathcal{S}$ (.E_1) și $\mathcal{S}$ (., E_2) sînt duale.

Demonstrație. Dacă $(x_q, u_q) \in X(q) \times U(q)$, atunci avem

$$\inf_{u \in U} \sup_{x \in X} f(x, u, q) = \sup_{x \in X} \inf_{u \in U} (x, u, q) = f(x_q, u_q, q). \tag{2.6}$$

Se notează cu $v(q) = \max_{x \in X} \varphi(x, q) = \min_{u \in U} \psi(u, q)$ (2.7).

Considerînd $\sigma > 0$ și notînd cu

$$X_\sigma = \{x : x \in X, \ \rho(x, X(q)) \leqslant \sigma\}, \tag{2.8}$$

se arată că pentru σ suficient de mare există

$$\lim_{t \to q} \sup_{x \in X_\sigma} \varphi(x, t) \geqslant v(q). \tag{2.9}$$

Se presupune că nu ar fi așa. Atunci, fixînd un $\sigma > 0$ se poate găsi un $\rho > 0$ și un șir $t_k \to q$, astfel încît :

(2.10) $\sup_{x \in X_\sigma} \varphi(x, t_k) < v(q) - \rho$ pentru toți k. Din (2.6) rezultă :

$$\sup_{x \in X_\sigma} \varphi(x, t_k) = \inf_{u \in U} \sup_{x \in X} f(x, u, t_k) < v(q) - \rho,$$

Scanned with OKEN Scanner

adică există un şir u_k astfel încît:

(2.11) $$\sup_{x \in X_\sigma} f(x, u_k, t_k) < v(q) - \rho \text{ pentru toţi } k.$$

Se va arăta în continuare că şirul $|u_k| \to \infty$ pentru $k \to \infty$. Într-adevăr, dacă nu ar fi aşa, atunci $u_k \to \tilde{u} \in U$ şi $\sup_{x \in X_\sigma} f(x, \tilde{u}, q) \leqslant v(q) - \rho$. Deci $v(q) = \sup_{x \in X_\sigma} \inf_{u \in U} f(x, u, q) = \inf_{u \in U} \sup_{x \in X_\sigma} f(x, u, q) \leqslant \sup_{x \in X_\sigma} f(x, u, q) \leqslant v(q) - \rho$ şi astfel afirmaţia este justificată.

Fie $u_0 \in U(q)$ astfel ca $\sup_{x \in X_\sigma} f(x, u_0, q) = v(q)$.

Datorită continuităţii, pentru $t = q$ şi $\varepsilon > 0$ se poate determina un $k(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $k > k(\varepsilon)$ să existe:

(2.12) $$\sup_{x \in X_\sigma} f(x, u_0, t_k) < v(q) + \varepsilon.$$

Fie şirul: $u_k^{(l)} = \frac{l}{|u_k|} \cdot u_k + \left(1 - \frac{l}{|u_k|}\right) u_0$; $|u_k| > l$ (pentru un l fixat $l > |u_0|$).

Avînd în vedere faptul că $|u_k| \to \infty$ cînd $k \to \infty$, rezultă că:
(2.13) $l - |u_0| \leqslant u_k^{(l)} \leqslant l + |u_0|$. Ţinînd cont de relaţiile (2.11), (2.12) şi de q-convexitatea funcţiei $\sup_{x \in X} f(x, u, t_k)$ pentru $u \in U$, rezultă că

(2.14) $$\sup_{x \in X_\sigma} f(x, u_k^{(l)}, t_k) < v(q) + \varepsilon.$$

Conform relaţiei (2.13) $u_k^{(l)} \to u^{(l)}$. Deoarece $u^{(l)}$ depinde de σ, se poate scrie $u^{(l)} = u^{(l)}(\sigma)$.

Din (2.14) se obţine: $\sup_{x \in X} f(x, u_{(\sigma)}^{(l)}, q) \leqslant v(q) + \varepsilon$ sau (2.15) $\sup_{x \in X_\sigma} f(x, u^{(l)}(\sigma), q) \leqslant v(q)$, deoarece ε este arbitrar. Din (2.13) vom avea $\lim_{\sigma \to \infty} u^{(l)}(\sigma) = \tilde{u}^{(l)}$.

Avînd în vedere acestea, din (2.15) se obţine

(2.16) $$\psi(u^{(l)}, q) = \sup_{x \in X} f(x, \tilde{u}^{(l)}, q) \leqslant v(q),$$

adică $\tilde{u}^{(l)} \in U(q)$ pentru $(\forall)\, l > |u_0|$. Avînd în vedere acum relaţia $l - |u_0| \leqslant |u^{(l)}(\sigma)| \leqslant l + |u_0|$, conduce la $|\tilde{u}^{(l)}| \geqslant l - |u_0|$.

O mulțime de subsisteme în interacțiune pot fi cuplate și în timp, formînd un sistem dinamic cu timp discret. Astfel de sisteme sînt ilustrate în [28, 99, 186].

Descrierea evoluției unor astfel de sisteme se face prin funcțiile de tranziție

$$\lambda_k : \Sigma_x \times S(I) \to \Sigma,$$

definite în modul următor:

$$s_k = \lambda_k (s_{k-1}, x_k); \quad x_k \in I_{k-1}(s_{k-1}) \subset S(I); \quad k = \overline{1, N},$$

unde I_{k-1} sînt determinate unic de o stare inițială dată și o secvență de intare fixată.

Fie Σ_k mulțimea stărilor accesibile la momentul k și s_k^j; $j = \overline{1, k_p}$ elementele lui Σ_k.

Folosind funcțiile de tranziție ale sistemului, în [186] sînt construite aceste mulțimi:

$$\Sigma_k = \{s \in \Sigma : (\exists) \tilde{s} \in \Sigma_{k-1} \text{ și } x \in I_k(\tilde{s}); \; s = \lambda_k(s, x)\},$$

pentru orice $k = \overline{1, N}$. Se constată ușor că aceste mulțimi au următoarele proprietăți:

1. $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset$, dacă $i \neq j$.

2) $\bigcup_{j=0}^{N} \Sigma_j = \Sigma$; $\Sigma_j \neq \emptyset$.

3) Relația $\Sigma_i \prec \Sigma_j$, dacă $i < j$ este o relație de ordine în Σ.

Cu aceste observații, este posibilă vizualizarea comportării sistemului în concordanță cu secvența de intrare adoptată, prin următoarea:

Definiția 2.5. Graful (Σ, Γ) se numește graf de stare a sistemului dacă [91]:

1) $\Sigma = \bigcup_{j=0}^{N} \Sigma_k$.

2) Funcția ordinală $\theta(s)$ are valorile $0, 1, 2, \ldots, N$.

3) $s \in \Sigma_k \Rightarrow \Gamma_s \subset \Sigma_{k+1}$; $k = 1, 2, \ldots, N-1$.

4) $s \notin \Sigma_N \Rightarrow \Gamma_s \neq \emptyset$ și $s \notin \Sigma_l \Rightarrow \tilde{\Gamma}_s \neq \emptyset$.

Observația 2.5. Avînd în vedere această definiție, în [186] se construiește aplicația Γ în modul următor:

$$\Gamma : \Sigma \to \mathcal{P}(\Sigma)$$

$$\Gamma_s = \{\tilde{s} \in \Sigma : \tilde{s} = \lambda_{j+1}(s, x) ; \quad x \in I_{j+1}(s), \ (\forall)\, s \in \Sigma_j\}.$$

Definiția 2.6. Se numește traiectorie de fază de la s_k la s_j pentru orice $0 \leqslant k < j \leqslant N$, orice drum de la s_k la s_j în graful (Σ, Γ). Fie această traiectorie $t_{kj}(s_k, s_j)$.

Propoziție 2.1. Traiectoria $t_{kj}(s_k, s_j)$ se poate determina unic în funcție de s_{k-1} și o secvență de intrare fixată.

Demonstrație. Într-adevăr, fie s_{k-1} fixat și fie $x = (x_k, x_{k+1}, \ldots, x_j)$ o secvență de intrare formată din $j-1$ intrări. Avînd în vedere tranzițiile sistemului se obține

$$s_k = \lambda_k(s_{k-1}, x_k)$$

$$s_{k+1} = \lambda_{k+1}(s_k, x_{k+1}) = \lambda_{k+1}(\lambda_k(s_{k-1}, x_k), x_{k+1})$$

$$= \lambda'_{k+1}(s_{k-1}, x_k, x_{k+1})$$

$$\vdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\vdots$$

$$s_j = \lambda'_j(s_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_j)$$

și astfel afirmația este justificată.

Fie $s \in \Sigma_{k-1}$, dacă $\tilde{s} = \lambda_k(s, x)$, unde $x \in I_k(s)$, atunci se va atașa arcului $(s, \tilde{s}) \in (\Sigma, \Gamma)$ numărul real $O_k(s, x)$ numit utilitate. Avînd valorile O_k, $k = \overline{1, N}$, oricărei traectorii $t \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ fiind mulțimea tuturor traiectoriilor) i se asociază valoarea

$$s(t) = f\,(O_1(s_1, x_1).\ O_2(s_2, x_2), \ldots, O_n(s_n, x_n)).$$

Definiția 2.7. Se numește sistem extremal secvențional, notat cu $\mathcal{S}$ (*ob. orientat*, E_{sec}), modelul matematic

$$(E\,sec)\begin{cases} opt\ f_N\,(O_1(s_1, x_1),\ O_2(s_2, x_2), \ldots, O_n(s_N, x_N)) \\ x_i \in I_i(s_{i-1}) \\ s_i = \lambda_i(s_{i-1}, x_i) ; \quad i = \overline{1, N}, \end{cases}$$

fizic realizabil.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 2.8. Se numește sistem extremal secvențial staționar sistemul $\mathcal{S}$ (*ob. oriental*, $\tilde{E}_{sec}$),

$$(E\,sec)\begin{cases} opt\, f\,(O\,(s_1, x_1),\ O\,(s_2, x_2),\ \ldots,\ O\,(s_N, x_N)) \\ x_i \in I\,(s_{i-1}) \\ s_i = \lambda\,(s_{i-1}, x_i)\,; \quad i=\overline{1, N} \end{cases}$$

Observația 2.6. Unul din cazurile frecvent întîlnite este cazul aditiv, cînd funcția $s\,(t)$ are forma

$$s\,(t) = \sum_{i}^{N} O_n\,(s_n, x_n).$$

În acest caz, traiectoria optimă este determinată în mod unic prin drumul optim din graful de stare (Σ, Γ), [15, 33, 91].

În această situație se poate preciza schema procesului de optimizare a unui sistem care evoluează secvențial, schimbîndu-și de la un moment la altul starea în urma adoptării unei intrări. Pentru a descrie pe cale matematică această transformare trebuie precizate :

1. Variabilele de fază.
2. Variabilele de intrare.
3. Limitările :

$$s_m\,(x_1, x_2, \ldots, x_N, s_1, s_2, \ldots, s_N)\ \{\geqslant, =, \leqslant\}\,0, \quad m=\overline{1, l},$$

aplicate atît variabilelor de fază, cît și variabilelor de intrare.

4. Desfășurarea procesului are loc

a) prospectiv

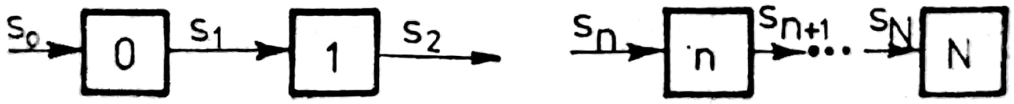


Fig. 2.2.

sau

b) retrospectiv

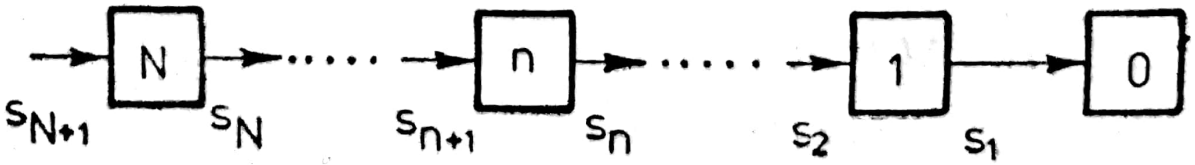


Fig. 2.3.

5) Funcția de performanță, adică indicatorul după care se compară diverse intrări posibile.

Se va numi intrare optimă acea intrare pentru care valoarea corespunzătoare a funcției de performanță este optimă.

Problema determinării intrării optime pentru $\mathcal{S}$ (*ob. oriental*, E_{sec}), precum și alte probleme legate de astfel de sisteme, inclusiv pentru comportarea aleatoare, se pot consulta în lucrările [55, 142, 186].

Sistemul $\mathcal{S}$ (*ob. oriental*, E_d) se poate transforma ușor în sistem secvențional: deoarece optimul căutat va depinde *de* k_m, se poate scrie

$$opt \sum_{j=1}^{N} f_j(x_j) = \varphi_N(k_1, k_2, \ldots, k_M).$$

Dacă se fixează mărimea x_N, atunci celelalte variabile trebuie să satisfacă următoarea condiție:

$$\sum_{p=1}^{N-1} f_{mp}(x_p) \leqslant k_m - f_{mN}(x_N).$$

Astfel

$$opt \sum_{1}^{N-1} f_j(x_j) = \varphi_{N-1}[k_1 - f_{1N}(x_N), \ldots, K_M - f_{MN}(x_N)].$$

Scriind

$$\sum_{j=1}^{N} f_j(x_j) = f_N(x_N) + \sum_{j=1}^{N-1} f_j(x_j)$$

și aplicînd principiul de optimalitate a lui R. Bellman [16], se scrie

$$\varphi_N(k_1, \ldots, k_M) = \underset{x_N}{opt}\,[f_N(x_N) + \varphi_{N-1}(k_1 - f_{1N}(x_N), \ldots, k_M - f_{MN}(x_N))],$$

prin care afirmația este justificată.

Caz particular. Sistemul liniar

$$opt \sum_{j=1}^{N} c_j x_j$$

$$\sum_{p=1}^{N} a_{mp} x_p \leqslant b_m; \quad m = \overline{1, M},$$

se trnsformă în

$$\varphi_N(b_1, b_2 \ldots b_M) = opt\,\{c_N x_N + \varphi_{N-1}(b_1 - a_{1N}\, x_N, \ldots, b_M - a_{MN} x_N)\},$$

dacă $x_N \geqslant 0$.

Observația 2.7. Scriind funcția de performanță sub forma

$$\sum_1^N f_j(x_j) - \lambda_M \sum_1^N f_{Mj}(x_j),$$

pentru un λ_M fixat, problema se poate rezolva considerînd numai $M-1$ din restricțiile modelului E_d. De aceea are loc scrierea

$$\varphi_N(k_1, \ldots, k_{M-1}, \lambda_M) = opt \sum_1^N \{f_j(x_j) - \lambda_M f_{Mj}(x_j)\}.$$

În încheierea acestui paragraf se va arăta cum se poate construi un graf secvențial pentru sistemul $\mathcal{S}$ (*ob. orientat*, E_d).

Fie $x_j \in X_j = \{x_{ji};\ i = \overline{1, p_j}\}$; $j = \overline{1, N}$ și $A = \{a\}$ vîrfurile grafului. Se unește a cu fiecare vîrf x_{1i}; $i = \overline{1, p_1}$, obținînd drumurile de lungime $l_{1i} = f_1(x_{1i})$. Vîrfurile x_{1i}; $i = \overline{1, p_1}$ se unesc cu x_{2i}; $i = \overline{1, p_2}$ obținînd drumurile de lungimea $l_{2i} = f_2(x_{2i})$ și așa mai departe. În final se obțin drumurile de lungime $l_{Ni} = f_N(x_{Ni})$. În felul acesta, pe mulțimea acestor vîrfuri rezultă partiția

$$I_1 = \{a, x_{11}, \ldots, x_{1p_1}\}, \ldots, I_N = \{x_{N1}, \ldots, y_{Np_N}\}.$$

Fie $B = I_N$.

Oricare drum din A în B corespunde unei alegeri a valorii x_j, $j = \overline{1, N}$ care poate să satisfacă sau nu condițiile

$$\sum_{p=1}^N f_{mp}(x_p) \leqslant k_m; \quad m = \overline{1, M}. \tag{2.18}$$

Dintre toate drumurile, interesează acelea care corespndu valorii alese pentru x_j și satisfac condițiile (2.18), [33].

2.1.2. SISTEME EXTREMALE CONVEXE

În cadrul studiului întreprins asupra sistemelor extremale, găsirea unui optim global are ordine prioritară. Trebuie subliniat faptul că în general nu proprietăţile optimului local sînt acelea care arată dacă el este global, ci structura generală a modelului matematic prin care se caracterizează acest sistem [10] :

Astfel, în cadrul sistemului $\mathcal{S}$ (. , E_{conv})

$$(E_{conv})\begin{cases} f(x) \to opt \\ x \in \Delta, \end{cases}$$

în care f este continuă pe $\triangle$, orice optim local este un optim global dacă : a) f este concavă (în cazul maximului) f este convexă (în cazul minimului) şi b) mulţimea $\triangle$ este convexă.

Din aceste considerente reiese clar importanţa mare pe care o au astfel de sisteme, în studiul care se întreprinde în capitolele III şi IV.

În continuare se va trece în revistă într-un cadru general caracteristicile principale ale acestor sisteme. Pentru fixarea ideilor, fie sistemul $\mathcal{S}$ (., E_{conv}) în următoarea precizare :

$$(E_{conv})\begin{cases} f(x) \to \sup \\ f_j(x) \geqslant 0 ; \quad j=\overline{1, m} \\ x \in G, \end{cases}$$

unde $G \subset E^n$, f, f_j sînt funcţii concave, iar

$$\triangle = \{x : f_j(x) \geqslant 0,\ j=\overline{1, m},\ x \in G\}.$$

Fie $F(x, u) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} u_j f_j(x)$; $x \in G$ funcţia lui Lagrange asociată lui E_{conv}. Luînd $g(x) = \inf_{u>0} F(x, u)$; $x \in G$, se poate defini următorul sistem extremal notat cu $\mathcal{S}$ (., E'_{conv})

$$(E'_{conv})\begin{cases} g(x) \to \sup \\ x \in G. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 2.9. $X=\{x^k\}$ se numește șir de soluții posibile ale lui $\mathcal{S}$ (., E_{conv}), dacă există limita $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k)$.

Se notează $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k)=f(X)$.

Definiția 2.10. X^* este o soluție optimă a sistemului $\mathcal{S}$ (. , E_{conv}), dacă $f(X^*)=\sup\limits_{x\in\Delta} f(x)=v$.

Lema 2.1. Sistemele $\mathcal{S}$ (. , E_{conv}) și $\mathcal{S}$ (. , E'_{conv}) sînt echivalente, dacă

a) $$v'=\sup_{x\in G} g(x)=v=\begin{cases}\sup\limits_{x\in\Delta} f(x), & \text{dacă } \Delta\neq\emptyset\\ -\infty, & \text{dacă } \Delta=\emptyset.\end{cases}$$

b) $X=\{x^k\}$ este soluție pentru $\mathcal{S}$ (., E_{conv}), atunci X este soluție și pentru $\mathcal{S}$ (., E'_{conv}).

c) $X=\{x^k\}$ este soluție pentru $\mathcal{S}$ (., E'_{conv}) astfel ca $g(x)=\lim\limits_{k\to\infty} g(x^k)>-\infty$, atunci X este soluție și pentru $\mathcal{S}$ (., E_{conv}).

Demonstrație. Fie $x\in\Delta$, deoarece $f_j(x)\geqslant 0$, $j=\overline{1, m}$, atunci pentru orice $u\geqslant 0$, $F(x, u)\geqslant f(x)$. Pe de altă parte $F(x, 0)=f(x)$, deci, $g(x)=\inf\limits_{u\geqslant 0} F(x, u)=F(x, 0)=f(x)$. Dacă $x\notin\Delta$, atunci $f_j(x)<0$ pentru cel puțin un indice i. Fie acesta $f_1(x)<0$.

Dacă se notează $u^k=(k, 0, 0, \ldots, 0)$, atunci

$$g(x)=\inf_{u\geqslant 0} F(x, u)\leqslant\lim_{k\to\infty} F(x, u^k)=-\infty.$$

Astfel

$$g(x)=\begin{cases} f(y) \text{ pentru } x\in\Delta\\ -\infty \text{ pentru } x\notin\Delta.\end{cases} \tag{2,19}$$

Dacă $v=-\infty$, $\Delta=\emptyset$ și cu (2.19) $v'=\sup\limits_{G} g(x)=\sup\limits_{x\in\Delta} f(x)=v$ și astfel afirmația a) este demonstrată. Se prespune acum că $X=\{x^k\}$ este o soluție a sistemului $\mathcal{S}$ (. , E_{conv}), adică $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k)=v>-\infty$. Deoarece $x^k\in\Delta$, ținînd cont de (2.19) există $v=\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k)=\lim\limits_{k\to\infty} g(x^k)$, deci $\lim\limits_{k\to\infty} g(x^k)=v'$. Analog se demonstrează c).

Considerînd $h(u)=\sup_{x\in G} F(x, u)$, se poate defini următorul sistem extremal $\mathcal{S}(\cdot, \tilde{E}_{conv})$:

$$(\tilde{E}_{conv}) \begin{cases} h(u)\to\inf \\ u\geqslant 0, \end{cases}$$

a cărui soluție optimă se notează cu $\tilde{v}$.

Lema 2.2. Sistemele $\mathcal{S}(\cdot, E_{conv})$ și $\mathcal{S}(\cdot, \tilde{E}_{conv})$ sînt duale, dacă $v=\tilde{v}$.

Demonstrație. Într-adevăr, $\tilde{v}=\inf_{u\geqslant 0} h(u)=\inf_{u\geqslant 0}\sup_{x\in G} F(x, u)$

iar
$$v=\begin{cases} \sup_{x\in\Delta} f(x), \text{ dacă } \Delta\neq\emptyset \\ -\infty, \text{ dacă } Q=\emptyset. \end{cases}$$

Ținînd seama de lema 2.1, se obține

$$v=\sup_{x\in G} g(x)=\sup_{x\in G}\inf_{u\geqslant 0} F(x, u)=\inf_{u\geqslant 0}\sup_{x\in G} F(x, u)=\tilde{v}.$$

Observația 2.8. Dacă mulțimile sînt compacte, atunci este valabilă teorema lui John von Neumann pentru jocuri antagoniste.

Lema 2.3. Oricare ar fi funcția f definită pe $X\times U$ cu valori reale ($X\neq\emptyset$, $U\neq\emptyset$), atunci

$$\sup_X \inf_U f(x, u)\leqslant \inf_U \sup_X f(x, u). \tag{2.20}$$

Afirmația este evidentă din inegalitatea

$$g(x)=\inf_U f(x, u)\leqslant \sup_X f(x, u)=h(u).$$

O primă problemă este de a stabili în ce condiții în (2.20) este îndeplinită condiția egalității.

Se presupune că f are argumente vectoriale: x este un vector m dimensional din X, iar u un vector n dimensional în U.

Teorema 2.2 [106]. Dacă X sau U este compact, iar f continuă în raport cu variabilele sale, atunci

$$\sup_X \inf_U f(x, u)=\inf_U \sup_X f(x, u). \tag{2.21}$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Se consideră că X este compact și f continuă în raport cu x pentru u fixat. Se notează cu $C(X)$ spațiul funcțiilor continue pe compactul X.
Fie $\varphi \in C(X)$ și mulțimea

$$K = \{\varphi : \varphi(x) \geqslant f(x), u)\}.$$

Se arată ușor că mulțimea K esteconvexă și conține punctele interioare. Fie $\varphi_v^*(x) \equiv v$, $x \in X$, $v_1 = \sup\limits_X \inf\limits_U f(x, u)$ și $v_2 = \inf\limits_U \sup\limits_X f(x, u)$.

Deoarece pentru orice $u \in U$, $\sup\limits_X f(x, u) < \infty$, rezultă că $v_2 < \infty$.

Se va demonstra că pentru orice $\varepsilon > 0$

$$\varphi_{v_2-\varepsilon}^* \notin K. \tag{2.22}$$

Presupunînd contrariul, se poate găsi un $u_\varepsilon \in U$ astfel ca $v_2 - \varepsilon \geqslant f(x, u_\varepsilon), x \in X$, deci $v_2 - \varepsilon \geqslant \sup\limits_X f(x, U_\varepsilon) \geqslant \inf\limits_U \sup\limits_X f(x, u) = v_2$, deci $\varepsilon \leqslant 0$, ceea ce este absurd. Astfel se poate spune că pentru orice $\varepsilon > 0$, $\varphi_{v_2}^*$ nu este punct interior pentru K.

Folosind acest rezultat și teorema de separabilitate a hiperplanelar, există funcționala $l(\varphi)$ liniară și mărginită pe $C(X)$ astfel ca

$$l(\varphi) \geqslant l(\varphi_{v_2}^*). \tag{2.23}$$

Se va arăta că l este nenegativă. Se presupune că în $C(X)$ există o funcție continuă nenegativă φ_0 astfel ca

$$l(\varphi_0) < 0 \tag{2.24}$$

Fie

$$\varphi_0 > \delta > 0, \ (\forall) \ x \in X. \tag{2.25}$$

Din (2.25) și definiția lui K rezultă că pentru un $\lambda > 0$ suficient de mare $\lambda\varphi_0 \in K$.

Cu (2.23), $l(\varphi_0) \geqslant \lim\limits_{\lambda \to \infty} \left[\frac{l}{\lambda} l(\varphi_{v_2})\right] = 0$, ceea ce este contrar lui (2.24), deci $l > 0$.

Aplicînd teorema lui Riesz, rezultă

$$l(\varphi) = \int_X \varphi(x)\, d\lambda, \tag{2.26}$$

unde λ este o măsură pe compactul X și $|l| = \lambda(X) > 0$.

Din (2.23) şi (2.26) rezultă că

$$\int_X \varphi(x)\, d\lambda \geqslant \int_X v_2\, d\lambda = v_2 \lambda(X) \text{ pentru } (\forall)\ \varphi \in K. \tag{2.27}$$

Dacă se ia $\lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda(X)}$ şi $\varphi = f \in K$ pentru $u \in U$ fixat, (2.27) devine

$$\int_X f(x, u)\, d\lambda^* \geqslant v_2\,; \quad u \in U. \tag{2.28}$$

Folosind $-\varphi(x_\mu) \geqslant \int_X \varphi(x)\, d_\mu$; $x_\mu \in X$. şi faptul că pentru $u \in U$ fixat f este concavă pe compactul X iar λ^* este măsură nenegativă, avem

$$f(x_{\lambda^*}, u) \geqslant \int_X f(x, u)\, d\lambda^*\,; \quad x_{\lambda^*} = \int_X x\, d\lambda^* \in X. \tag{2.29}$$

Din (2.28) şi (2.29) se deduce

$$v_2 \leqslant \int_X f(x, u)\, d\lambda^* \leqslant f(x_{\lambda^*}, u)$$

pentru

$$(\forall)\ u \in U \text{ şi } x_{\lambda^*} \in X,$$

adică

$$v_2 \leqslant \inf_{u \in U} f(x_{\lambda^*}, u) \leqslant \sup_X \inf_U f(x, u) = v_1. \tag{2.30}$$

Conform inegalităţii (2.20) $v_1 \leqslant v_2$ şi deci cu (2.30) se obţine $v_1 = v_2$.

Observaţie 2.9. În continuare se folosesc notaţiile :

$$\varphi(x) = \inf_U f(x, u)\,; \quad x \in X,$$

$$\psi(u) = \sup_X f(x, u)\,; \quad u \in U.$$

Lema 2.4. Dacă X (U) este concavă (convexă) şi $x \to f(x, u)$ ($u \to f(x, u)$) este concavă (convexă), atunci φ (ψ) este concavă (convexă).

Demonstrație. Fie $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$, $x_1, x_2 \in X$, $0<\lambda<1$.

Fixînd pe u, se poate scrie $f(x_\lambda, u) \geqslant f(x_1, u) + (1-\lambda) f(x_2, u)$. Cu aceasta se obține: $\varphi(x_\lambda) = \inf\limits_U f(x_\lambda, u) \geqslant \inf\limits_U [\lambda f(x_1, u) + (1-\lambda) f(x_2, u)] \geqslant \lambda \inf\limits_U f(x_1, u) + (1-\lambda) \inf\limits_U f(x_2, u) = \lambda\varphi(x_1) + (1-\lambda)\varphi(x_2)$.

Deci φ este concavă.

Lema 2.5. Dacă $x \to f(x, u)$ $(u \to f(x, u))$ este semicontinuă superior (inferior), atunci φ (ψ) este semicontinuă superior (inferior) pe X (U).

Demonstrație. Fie $x_0 \in X$ și $\varepsilon > 0$. Din definiția funcției φ se deduce existența unui u_ε astfel încît $\varphi(x_0) \geqslant f(x_0, u_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}$.

Deoarece s-a presupus că f este semicontinuă superior în raport cu x, se poate găsi un $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît

$$|x - x_0| \leqslant \delta(\varepsilon),\ f(x, u_\varepsilon) - f(x_0, u_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deci $\varphi(x_0) \geqslant f(x_0, u_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant f(x, u_\varepsilon) - \varepsilon \geqslant \varphi(x) - \varepsilon$.

Observația 2.10. Se știe că o funcție semicontinuă pe un compact își atinge marginile. Din acest motiv φ (ψ) își atinge marginea superioară (inferioară) pe orice submulțime compactă a lui X (U).

Fie $G \subset X$, $F \subset U$ și $\varphi_F(x) = \inf\limits_F f(x, u)$, $\psi_G(u) = \sup\limits_G f(x, u)$. Deci $\varphi(x) = \varphi_U(x)$ și $\psi(u) = \psi_X(u.)$. Dacă $F_1 \subset F$ și $G_1 \subset G_2$ atunci

$$\varphi_{F1} \geqslant \varphi_{F2},\ x \in X \text{ și } \psi_{G1} \leqslant \psi_{G2},\ u \in U.$$

Lema 2.6. Fie funcția f semicontinuă superior (inferior) pentru $x \in X$ $(u \in U)$,. Dacă $\hat{\varphi}$ $(\hat{\psi})$ este majorantă (minorantă) continuă a funcției φ (ψ) pe compactul $G \subset X$ $(F \subset U)$, atunci se poate găsi o mulțime F_1 (G_1) care conține un număr finit de puncte ale mulțimii U (X) astfel ca $\hat{\varphi}$ $(\hat{\psi})$ este majoranta (minoranta) funcției φ_{F1} (φ_{G1}) pe G (F).

Demonstrație. Avînd în vedere modul în care a fost definită funcția $\hat{\varphi}$, pentru $(\forall)\, x_0 \in G$ se poate găsi un $u_0 \in U$ astfel ca

$f(x_0, u_0) < \hat{\varphi}(x_0)$. În virtutea semicontinuităţii lui f în (x, u_0) şi continuităţii lui $\hat{\varphi}$, se poate determina o vecinătate $V(x_0)$ a punctului x_0 în care $f(x, u_0) < \hat{\varphi}(x)$, dacă $x \in V(x_0)$.

Compactul G se bucură de proprietatea $G \subset \bigcup_{x \in G} V(x)$.

Folosind teorema Heine-Borel, există un şir $x_1, x_2, \ldots, x_N \in G$ astfel încît $G \subset \bigcup_{\alpha=1}^{N} V((x_\alpha)$.

Fie $F_1 = \bigcup_{\alpha=1}^{N} \{u_\alpha\}$, unde $u_\alpha = u(x_\alpha)$ şi x un punct oarecare a compactului G.

Alegînd un indice i astfel ca $x \in V(x_i)$, atunci $f(x, u_i) < \hat{\varphi}(x)$, unde $u_i = u(x_i)$.

Pe de altă parte $\varphi_{F1}(x) = \min_{1 \leq \alpha \leq N} \varphi(x, u_\alpha) \leqslant f(x, u_i)$ deci $\varphi_{F_1}(x) < \hat{\varphi}(x)$.

Observaţia 2.11. Dacă $X^* = \{x : \varphi(x) = \sup_{x' \in X} \varphi(x'), \ x \in X\}$ $(X^* \neq \emptyset)$ şi funcţia f este concavă, atunci X^* este convexă. Analog pentru $U^* = \{u : \psi(u) = \inf_{u' \in U} \psi(u'), \ u \in U\}$.

Teorema 2.6. Fie X şi U închise şi convexe şi f o funcţie concav-convexă pe $X \times U$.

Dacă una din mulţimile X^*, U^* e nevidă şi mărginită, iar f este continuă în raport cu variabilele sale, atunci

$$\sup_X \inf_U f(x, u) = \inf_U \sup_X f(x, u).$$

Demonstraţie. Fie $v_1 = \sup_{x \in X} \varphi(x)$ şi $v_2 = \inf_{u \in U} \psi(u)$. Se presupune că v_2 este finit, atunci cu lema 2.3 avem

$$-\infty \leqslant v_1 \leqslant v_2 \leqslant +\infty. \tag{2.31}$$

Dacă U este mărginită, atunci din teorema 2.2 se deduce această teoremă.

Se presupune că U este nemărginită. Fie $\varepsilon > 0$ şi mulţimile:

$$U_\varepsilon = \{u : \rho(u, U^*) \leqslant \varepsilon, \quad u \in U\}$$

$$A_\varepsilon = \{u : \varepsilon \leqslant \rho(u, U^*) \leqslant 2\varepsilon, \ u \in U\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din condițiile U^* mărginită, U nemărginită, rezultă că mulțimile definite mai sus sînt nevide, închise și mărginite. Deci U_ε și A_ε sînt compacte. Din definiția lui A_ε se deduce că $\psi(u) > v_2$, $u \in A_\varepsilon$, adică v_2 este un minorant al funcției ψ pe mulțimea A_ε. Folosind lema 2.6 se poate găsi o mulțime $G_1 \subset X$ astfel încît: $\psi_{G1}(u) > v_2$, $u \in A_\varepsilon$. Deoarece $\psi(u) > v_2 - \varepsilon$, $u \in U_\varepsilon$ există o mulțime finită $G_2 \subset X$ astfel încît $\psi_{G2}(u) > v_2 - \varepsilon$, $u \in U_\varepsilon$. Dacă $G = G_1 \cup G_2 = \{x_1, x_2, \ldots x_N\}$, atunci se obține

$$\psi_G(u) \geqslant \psi_{G1}(u) > v, \quad u \in A_\varepsilon, \tag{2.32}$$

$$\psi_G(u) \geqslant \psi_{G2}(u) > v_2 - \varepsilon; \quad u \in U_\varepsilon. \tag{2.33}$$

Se va arăta în continuare că $\psi_G(u) > v_2$ pentru orice $u \notin U_\varepsilon$. Fie $\rho(u, U^*) > 2\varepsilon$. Se alege $u^* \in U^*$ și se consideră segmentul δ ce unește u^* și u. Din continuitatea funcției $\rho(u, U^*)$ pe δ rezultă existența punctului $u' \in A_\varepsilon$.

Dacă se presupune că $\psi_G(u) \leqslant v$, atunci deoarece funcția ψ_G este convexă pe U, iar $\psi_G(u^*) \leqslant \psi(u^*) = v_2$ atunci $\psi_G(u') \leqslant \alpha\psi_G(u^*) + (1-\alpha)\psi_G(u)$ pentru $0 < \alpha < 1$, adică $\psi_G(u') \leqslant v_2$, $u' \in A_\varepsilon$, ceea ce este incompatibilă cu (2.23). Pe de altă parte, pe U^*, $\psi_G = v_2$. Deci pentru orice mulțime $F \supset U$:

$$\inf_{u \in F} \psi_G(u) = \inf_{u \in U_\varepsilon} \psi_G(u). \tag{2.34}$$

Considerînd șirul de compacte convexe

$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_k \subset \ldots; \quad U_\varepsilon \subset F_1 \text{ și } \bigcup_k F_k = U,$$

cu (2.33) și (2.34) se obține

$$\inf_{u \in F_k} \psi_G(u) > v_2 - \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.35}$$

Deoarece $\psi_G(u) = \max_{1 \leq i \leq N} f(x_i, u)$, atunci subzistă evident următoarea egalitate: $\psi_G(u) = \max_{\xi \in S} \sum_{i=1}^{N} f(x_i, u)\xi_i$, unde $S = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_N) : \sum_{i=1}^{N} \xi_i = 1, \ \xi_i \geqslant 0, \ i = \overline{1, N}\}$.

Punînd $\tilde{f}(\xi, u)=\sum_{i=1}^{N} f(x_i, u)\,\xi_i$, (2.35) poate fi scrisă sub forma

$$\inf_{u\in F_k}\ \sup_{\xi\in S}\ \tilde{f}(\xi, u(>v_2-\varepsilon\,;\quad k=1, 2\ldots$$

Avînd în vedere faptul că $\xi\to f(\xi, u)$ e liniară, $u\to f(\xi, u)$ este convexă, iar mulțimile S, F_k sînt convexe și compacte, cu teorema 2.2 se poate scrie

$$\sup_{\xi\in S}\ \inf_{u\in F_k}\ \tilde{f}(\xi, u)=\inf_{u\in F_k}\ \sup_{\xi\in S}\ \tilde{f}(\xi, u)>v_2-\varepsilon, k=1, 2, \ldots \tag{2.36}$$

Fie $v=\sup_{\xi\in S}\ \inf_{u\in U} \tilde{f}(\xi, u)$. Atunci pentru orice k, $\sup_{\xi\in S}\ \inf_{u\in F_k} \tilde{f}(\xi, u)\geqslant v$

Pe de altă parte, pentru orice $\delta>0$, după lema 2.6, se poate determina un $k(\delta)$ astfel încît pentru $k\geqslant k(\delta)$

$$\sup_{\xi\in S}\ \inf_{u\in F_k} \tilde{f}(\xi, u)\leqslant v+\delta.$$

în concluzie,

$$\lim_{k\to\infty}\ \sup_{\xi\in S}\ \inf_{u\in F_k} f(\xi, u)=v. \tag{2.37}$$

Din (2.36) și (2.37) se obține: (2.38) $\sup_{\xi\in S}\ \inf_{u\in U} \tilde{f}(\xi, u)=$ $=v>v_2-\varepsilon$. În virtutea faptului că $x\to f(x, u)$ este convexă

$$\tilde{f}(\xi, u)=\sum_{i=1}^{N} f(x_i, u)\,\xi_i\leqslant f\Big(\sum_{i=1}^{N} \xi_i x_i, u\Big)\,;\quad \xi\in S.$$

Din această cauză

$$\lim_{u\in U} \tilde{f}(\xi, u)\leqslant \inf_{u\in U} f(x_\xi, u)\,;\ x_\xi=\sum_{i=1}^{N} \xi_i x_i\in X.$$

Deci

$$\sup_{\xi\in S}\ \inf_{u\in U} \tilde{f}(\xi, u)\leqslant \sup_{x\in X}\ \inf_{u\in U} f(x, u)=v_1. \tag{2.39}$$

Din (2.38) și (2.39) rezultă că $v_2\leqslant v_1$.

Ținînd cont acuma și de (2.31), se obține $v_1=v_2$.

Scanned with OKEN Scanner

A doua problemă care se dezvoltă în continuare este de a stabili în ce condiţii sistemele $\mathcal{S}(., E_{conv})$ şi $\mathcal{S}(., \tilde{E}_{conv})$ sînt duale.

Teorema 2.3 (prima teoremă de dualitate). Sistemele $\mathcal{S}(., E_{conv})$ şi $\mathcal{S}(., \tilde{E}_{conv})$ sînt duale dacă:

a) f şi f_j $(j=\overline{1, m})$ sînt continue pe mulţimea închisă G.

b) Mulţimea soluţiilor sistemului $\mathcal{S}(., E_{conv})$ e nevidă şi mărginită.

Demonstraţia. Conform lemei 2.1, sistemul $\mathcal{S}(., E_{conv})$ este echivalent cu sistemul

$$g(x)=\inf_{u\geq 0} F(x, u)\to\sup; \quad x\in G,$$

unde:

$$F(x, u)=f(x)+\sum_{j=1}^{m} u_j f_j(x),$$

deoarece $v=v'$ şi mulţimea $X^*=\{x: g(x)=v, x\in G\}$ coincide cu mulţimea soluţiilor lui $\mathcal{S}(., E_{conv})$.

Aplicînd teorema 2.2 cu precizarea $f(x, u)=F(x, u)$, $x\in X=G$, $u\in U=\{u\geqslant 0\}$ se obţine:

$$v=\sup_{x\in G}\inf_{u\geq 0} F(x, u)=\tilde{v}=\inf_{u\geq 0}\sup_{x\in G} F(x, u).$$

Teorema 2.4 (a doua teoremă de dualitate). Sistemele $\mathcal{S}(., E_{conv})$ şi $\mathcal{S}(., \tilde{E}_{conv})$ sînt duale, dacă sistemul $\mathcal{S}(., E_{conv})$ satisface condiţia lui Slater [10].

Demonstraţie. Se consideră $X=G$ şi $U=\{u\geqslant 0\}$.

În condiţiile lemei 2.1 şi teoremei 2.2 pentru demonstrarea dualităţii este suficient a verifica că mulţimea $U^*=\{\psi(u)=\tilde{v}, u\geqslant 0\}$ este nevidă şi mărginită. Fie $\tilde{v}<\infty$. Se alege $u'\geqslant 0$ astfel ca $\psi(u')<\infty$. În aceste condiţii, pentru orice $u\geqslant 0$ se poate scrie

$$\psi(u)=\sup_{x\in G}\left[f(x)+\sum_{j=1}^{m} u_j f_j(x)\right]\geqslant f(x')+\sum_{j=1}^{m} u_j f_j(x')\geqslant f(x')+$$

$$\min_j f_j(x')\cdot\sum_{j=1}^{m} u_j=f(x')+\alpha\sum_{j=1}^{m} u_j,$$

unde : $\alpha = \min_j f_j(x') > 0$, $x' \in G$ (x' figurează în condiția lui Slater).

Fie $u \geqslant 0$ și $\sum_{j=1}^{m} u_j > \frac{\psi(u') - f(x')}{\alpha} = A$.

Atunci $\psi(u) > \psi(u') \geqslant \tilde{v}$. Se poate afirma acum că în cazul în care U^* este nevidă, este submulțime mărginită a mulțimii Q

$$Q = \{u : u \geqslant 0, \ \sum_{j=1}^{m} u_j \leqslant A\}.$$

Cu precizările făcute $\tilde{v} = \inf_{u \geqslant 0} \psi(u) = \inf_{u \in Q} \psi(u)$.

Deoarece ψ este semicontinuă inferior (lema 2.5), își atinge marginea inferioară pe compactul Q.

În felul acesta U^* este mărginită și nevidă.

Definiția 2.11. $\{x^k, u^k\}$, $x^k \in X$, $u^k \in U$ se numește șir de puncte șa ale funcției f pe $X \times U$ dacă

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \sup_{x \in X} f(x, u^k) \leqslant \lim_{k \to \infty} \inf_{u \in U} f(x^k, u). \tag{2.40}$$

Observația 2.12. Relația (2.40) poate fi scrisă sub următoarea formă echivalentă :

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{x \in X} f(x, u^k) = \lim_{k \to \infty} f(x^k, u^k) = \lim_{k \to \infty} \inf_{u \in U} f(x^k, u). \tag{2.41}$$

În condițiile unui șir staționar $\{x^k, u^k\} = \{x^0, u^0\}$, (2.41) devine : $\sup_{x \in X} f(x, u^0) = f(x^0, u^0) = \inf_{u \in U} f(x^0, u)$, sau $f(x, u^0) \leqslant f(x^0, u^0) \leqslant$ $\leqslant f(x^0, u)$, $x \in X$ și $u \in U$.

Teorema 2.6 (existența punctelor șa). Condiția necesară și suficientă pentru ca f să admită puncte șa pe $X \times U$ este ca

$$\sup_{x \in X} \inf_{u \in U} f(x, u) = \inf_{u \in U} \sup_{x \in X} f(x, u).$$

Observația 2.13. Dacă X și U sînt spații liniare topologice separate, $A \subset X$, $B \subset U$, mulțimi convexe compacte, iar f o funcție convex-concavă semicontinuă inferior-superior pe $A \times B$, atunci f verifică egalitatea

$$\min_{x \in A} \max_{u \in B} f(x, u) = \max_{u \in B} \min_{x \in A} f(x, u).$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicarea acestei relații la matrici se bazează pe faptul, că matricea

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

se poate considera o funcție reală de două variabile $f(i, j)$, care este definită pentru $i=1, 2, \dots, m$ și $j=1, 2, \dots, n$ de egalitatea $f(i, j)=a_{ij}$, obținîndu-se următoarea formulare a teoremei.

Teorema 2.7 Condiția necesară și suficientă pentru ca

$$\max_j \min a_{ij}=\min_j \max_j a_{ij}$$

este ca matricea A să aibă un punct șa, adică să existe o pereche de numere naturale (i_0, j_0), pentru care $a_{i_0 j_0}$ să fie concomitent minimul în linia i_0 și maximul în coloana j_0.

Dacă matricea A este matricea unui joc, atunci elementul a_{ij} din matrice, reprezintă valoarea criteriului de eficiența cînd primul jucător aplică strategia i, iar cel de-al doilea strategia j. În cazul în care nici unul dintre jucători nu deține informații cu privire la strategia aleasă de celălalt, se utilizează strategii mixte care se notează prin $P=\{p_i\}$ și $Q=\{q_j\}$. Aceste strategii conduc la valoarea medie a funcției de plată

$$f(P, Q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_iq_j.$$

Acest criteriu este definit pe mulțimile convexe L și M ale căror elemente sînt strategiile mixe P și Q. În acest caz există un punct șa dacă

$$\max_{P\in L} \min_{Q\in M} f(P, Q)=\min_{Q\in M} \max_{P\in L} f(P, Q).$$

Cu aceste precizări se poate enunța

Teorema 2.8 (jocuri matriciale). Orice joc matricial admite un punct șa în strategii mixte.

Demonstrație. Mulțimile L și M sînt definite prin condițiile:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \; ; \quad p_i \geqslant 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \; ; \quad q_j \geqslant 0.$$

Deci L și M sînt închise și mărginite, iar funcția de plată este continuă în raport cu variabilele sale și convex-concavă. Pe de altă parte L și M sînt convexe.

Observația 2.14. Legăturile dintre teoria jocurilor matriciale și alte concepte sînt precizate în schema 1 (cititorul interesat poate găsi detalii în [15, 91] și lucrarea *Teoria jocurilor strategice* de Al. Roșu).

Teorema 2.9 (primul criteriu de optimalitate). Fie $X = \{x^k\}$ un șir de soluții posibile ale sistemului $\mathcal{S}$ (., E'_{conv}). Pentru ca X să fie soluție optimă pentru $\mathcal{S}$ (., E'_{conv}) este suficient, iar în cazul $v = \tilde{v}$ și necesar să existe un șir $\{u^k\}$, $u^k \geqslant 0$ astfel încît

(2.42) a) $\lim\limits_{k\to\infty} F(x^k, u^k) = \lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in G} F(x, u^k)$,

(2.43) b) $\lim\limits_{k\to\infty} u_j^k f_j'(x^k) = 0 \; ; \quad j = \overline{1, m}.$

Demonstrație. Fie $X = \{x^k\}$ o soluție a sistemului $\mathcal{S}$ (., E_{conv}). Deoarece $\mathcal{S}$ (., E_{conv}) este echivalent cu $\mathcal{S}$ (., E'_{conv}), (lema 2.1), se alege u^k o soluție a sistemului $\mathcal{S}$ (., E'_{conv}). Folosind teorema 2.6 se concluzionează că $\{x^k, u^k\}$ este un șir de puncte șa ale funcției Lagrange F pentru $x \in G$ și $u \geqslant 0$. Ca atare are loc (2.41):

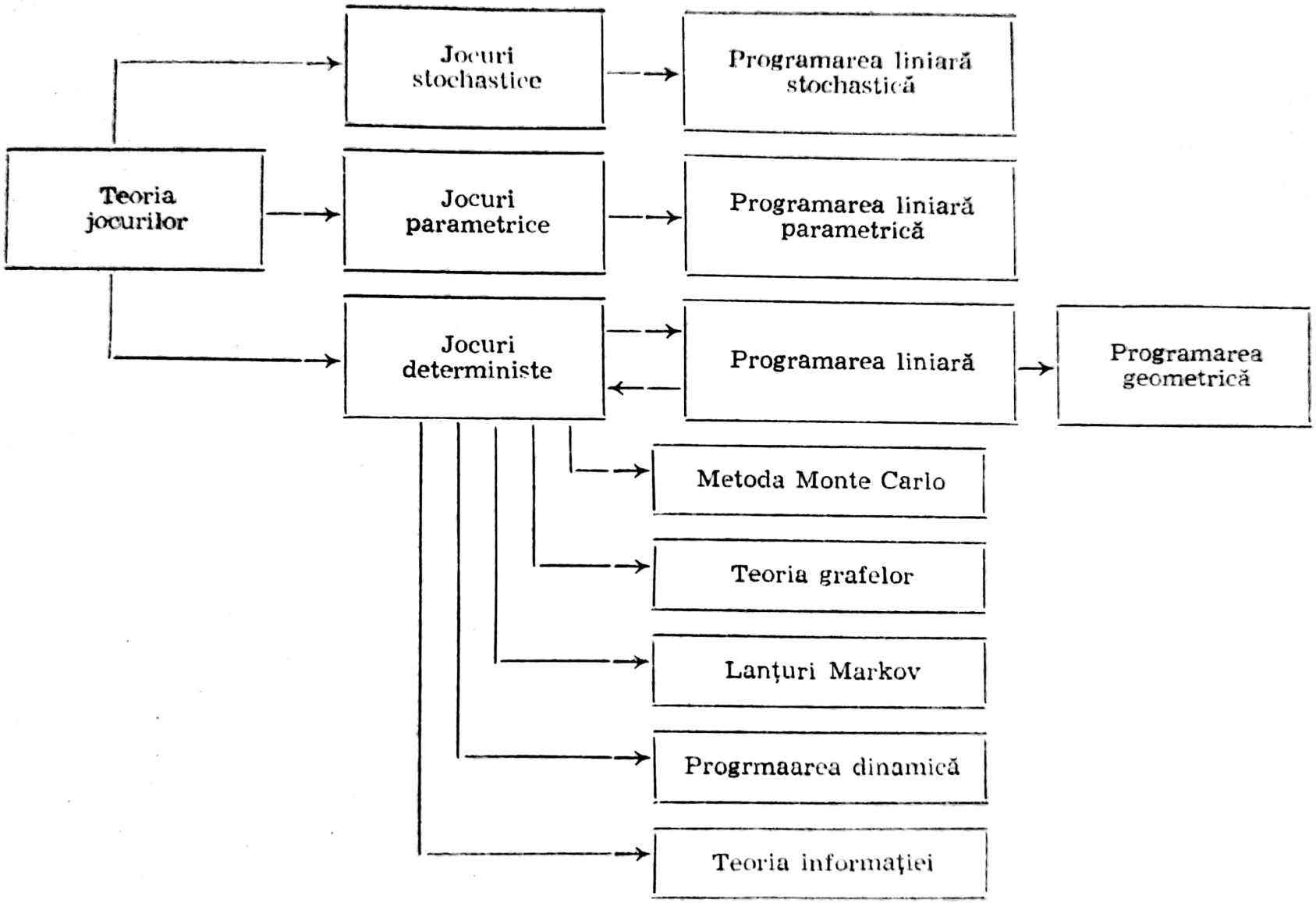
$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in G} F(x, u^k) = \lim_{k\to\infty} F(x^k, u^k) = \lim_{k\to\infty} \inf_{u\geqslant 0} F(x^k, u).$$

De aici se deduce că: $\inf\limits_{u\geqslant 0} F(x^k, u) = f(x^k)$.

Se presupune acum că pentru X ales sînt satisfăcute (2.42) și (2.43). Deci $f(X) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x^k) = \lim\limits_{k\to\infty} F(x^k, u^k) = \lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in G} F(x, u^k)$. Deoarece Δ este mulțimea soluțiilor posibile ale sistemului $\mathcal{S}$ (., E_{conv}) atunci $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in G} F(x, u^k) \geqslant \lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in\Delta} F(x, u^k) \geqslant \sup\limits_{x\in\Delta} f(x)$.

Cum pentru $x \in \Delta$, $f_j(x) \geqslant 0$ $j = \overline{1, m}$, $u^k \geqslant 0$; $f(X) \geqslant \sup\limits_{x\in\Delta} f(x)$ și deci X este soluție pentru sistemul $\mathcal{S}$ (., E_{conv}).

Scanned with OKEN Scanner



SCHEMA 1

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 2.10 (al doilea criteriu de optimalitate). Fie $X=\{x^k\}$ un şir de soluţii posibile ale sistemului extremal $\mathcal{S}(., E_{conv})$ şi $f(X)<\infty$. Pentru ca X să fie soluţie a sistemului este suficient, iar în cazul îndeplinirii relaţiilor de dualitate şi necesar să existe vectorul $u^k \geqslant 0$ astfel încît $\lim\limits_{k\to\infty} F(x^k, u^k)=\sup\limits_{x\in G_{AB}} F(x, u^k); u_i^k=0$, dacă $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\ f(x^k)>0$.

Demonstraţie. Necesitatea se demonstrează ca şi în teorema anterioară. Se alege în particular u^* ca soluţie a sistemului dual $\tilde{E}_{conv}$. Suficienţa rezultă din teorema anterioară dacă $X=\{x^k\}$, atunci $F(x^*, u^*)=\sup\limits_{x\in G} F(x, u^*)$; $u_i^*=0$, dacă $f_j(x^*)>0$.

Observaţia 2.15. Folosind termonologia punctelor şa ale funcţiei Lagrange, teoremele anterioare conduc la condiţiile Kuhn-Tucher.

2.1.3. STRUCTURA ALGEBRICĂ A ALGORITMILOR DE BAZĂ PENTRU SISTEMELE EXTREMALE NELINIARE

Modelarea matematică a acestor sisteme oferă posibilitatea determinării soluţiilor optime din anumite puncte de vedere. Metodele pentru determinarea soluţiei optime se găsesc în lucrările [6, 37, 40, 54, 62, 63, 64, 67, 85, 89, 109, 111, 119, 124, 140, 141, 184, 191, 192, 193] şi bibliografiile corespunzătoare. În [89] se arată că aceste metode se pot împărţi în următoarele categorii

1. Metode de penalizări exterioare.
2. Metode interioare admisibile:
   a) penalizări interioare cu parametru,
   b) penalizări interioare fără parametru,
   c) deplasări urmărind direcţii admisibile.
3. Metode de frontieră sau proiecţie:
   a) adaptarea metodei gradienţilor,
   b) adaptarea metodei lui DAVIDON,
   c) adaptarea metodei lui Rosenbrock,
   d) proiecţii şi schimbarea variabilelor.

Scanned with OKEN Scanner

4. Metode de liniarizare.

4.1. Metode tangenţiale :

a) limitarea deplasărilor,

b) puncte de liniarizare multiple,

c) metoda Frank şi Wolfe,

d) metodele centrelor liniarizate.

4.2. Metode baricentrice.

5. Metode ale langranjienilor.

6. Cercetări punctuale sau pe porţiuni.

Metode de gradient

Se consideră sistemul $\mathcal{S}$ (., E_1)

$$(E_1)\begin{cases} f^0(z) \to min \\ z \in \Delta, \end{cases}$$

unde $f^0 : R^n \to R$; $\Delta = \{z : f(z) \leqslant 0,\ r(z) = 0\}$; $f : R^n \to R^m$; $r : R^n \to R^l$ (f^0, f, r fiind funcţii continue şi diferenţiabile).

În continuare se vor prezenta pe scurt condiţiile de optimalitate. Pentru diferitele detalii se poate consulta [141].

Teorema 2.11. Dacă $\hat{z}$ este soluţia optimă a sistemului $\mathcal{S}$ (., E_1) atunci există scalarii $\mu^0 \leqslant 0, \ldots u^m \leqslant 0$ şi $\alpha^1, \alpha^2, \ldots \alpha^l$ nu toţi nuli, astfel încît să avem

$$\text{(a)} \sum_{i=0}^{m} \mu^i \nabla f^i(\hat{z}) + \sum_{i=1}^{l} \alpha^i \nabla r^i(\hat{z}) = 0,$$

$$\text{(b)} \ \mu^i f^i(\hat{z}) = 0 ; \quad i = \overline{1, m}.$$

Consecinţa 2.1. Dacă există $h \in R^n$ astfel încît $< \nabla f^i(\hat{z}), h > > 0$, $(\forall)\ i \in \{1, 2, \ldots m\}$ pentru ca $f^i(\hat{z}) = 0$, atunci $(\mu^0, \alpha^1, \ldots \ldots \alpha^l) \neq 0$.

Consecinţa 2.2. Fie vectorii liniar independenţi $\nabla r^i(\hat{z})$, $i = \overline{1, l}$ din (a), (b). Dacă există $h \in R^n$ astfel încît $< \nabla f^i(z), h \gg 0$ pentru toţi $i = \overline{1, m}$, pentru care $f^i(\hat{z}) = 0$ şi $< \Delta r^i(\hat{z}), h > = 0$ $i = \overline{1, l}$, atunci $\mu^0 < 0$.

Teorema 2.12. Fie $\mathcal{S}(., E_1)$, $r(.)=0$ şi $\tilde{u}$ o soluţie optimă, atunci

$$\min_{h \in S} \max_{i \in J_0(\hat{z})} <\nabla f^i(z), h>=0,$$

unde S este o mulţime oarecare din R^n conţinînd originea şi în particular fiecare punct interior

$$J_0(\hat{z})=\{0\} \cup \{i : f^i(\hat{z})=0, \quad i=\overline{1, m}\}. \tag{2.44}$$

Teorema 2.13. Fie funcţiile convexe $f^i(.)$, $i=\overline{0, m}$ şi $r(.)$ o funcţie afină. Dacă $\tilde{u}$ satisface condiţiile $r(\hat{z})=0$, $f^i(\hat{z}) \leqslant 0$ pentru $i=\overline{1, m}$ şi există scalarii $\mu^i \leqslant 0$, $i=\overline{1, m}$, α^i, $i=\overline{1, l}$ astfel încît să avem

$$-\nabla f^0(\hat{z})+\sum_1^m \mu^i \nabla f^i(\hat{z})+\sum_1^l \alpha^i \nabla r^i(\hat{z})=0$$

$$\mu^i f^i(\hat{z})=0, ; \; i=\overline{1, m},$$

atunci $\tilde{u}$ este o soluţie optimală pentru $\mathcal{S}(., E_1)$.

Cu ajutorul acestor precizări se poate formula următorii algoritmi de calcul pentru sistemul $\mathcal{S}(., E_2)$

$$(E_2) \begin{cases} f^0(z) \to \min \\ z \in R^n ; \quad f^0 : R^n \to R^1, \end{cases}$$

(f^0 — continuă şi diferenţiabilă).

Presupunem că în R^n există un punct u_0 astfel încît mulţimea : (2.45) $C(z_0)=\{z : f^0(z) \leqslant f^0(z_0)\}$ să fie mărginită. Dacă în plus f^0 este şi convexă şi $\nabla f^0(z')=0$, atunci $\mathcal{S}(., E_2)$ admite o soluţie optimală ($f^0(z')=\min \{f^0(z) : z \in R^n\}$.

În vederea descrierii algoritmilor, considerăm matricea nedegenerată $D(z)$ de tipul $n \times n$ avînd ca elemente funcţii continue de u.

Algoritmul 1. Pasul 0 : se alege $z_0 \in R^n$ astfel ca (2.45) să fie mărginită. Pasul 1 : se ia $i=0$. Pasul 2 : se calculează $-D(z_i) \nabla f^0(z_i)$. Pasul 3 : se ia $h(z_i)=-D(z_i) \nabla f^0(z_i)$. Dacă $h(z_i)=0$ stop, în caz contrar se trece la pasul următor. Pasul 4 : se calculează cel mai mic număr pozitiv $\lambda(z_i)$ care satisface condiţia

$f^0(z_i+\lambda h(z_i))=min\ \{f^0(z_i+\lambda h(z_i)) : \lambda \geqslant 0\}$. Pasul 5: se pune $z_{i+1}=z_i+\lambda(z_i)\,h(z_i)$ şi $i=i+1$, apoi la trece pasul 2.

Algoritmul 2. Fie funcţia convexă $\theta : R^+ - R^1$ care îşi atinge minimul în $\lambda>0$. Prin următorul algoritm se arată că printr-un număr finit de paşi putem construi un segment de lungime $\varepsilon>0$, care conţine punctul λ.

Observaţia 2.16. Primii şase paşi ai algoritmului împart segmentul $[a_0, b_0]$ ($\lambda \in [a_0, b_0]$). Prin următorii paşi se caută segmentul de lungime ε ce conţine acest punct. Considerăm precizarea $\varepsilon>0$, $\rho>0$, $F_1 \approx 0{,}38$, $F_2 \approx 0{,}68$.

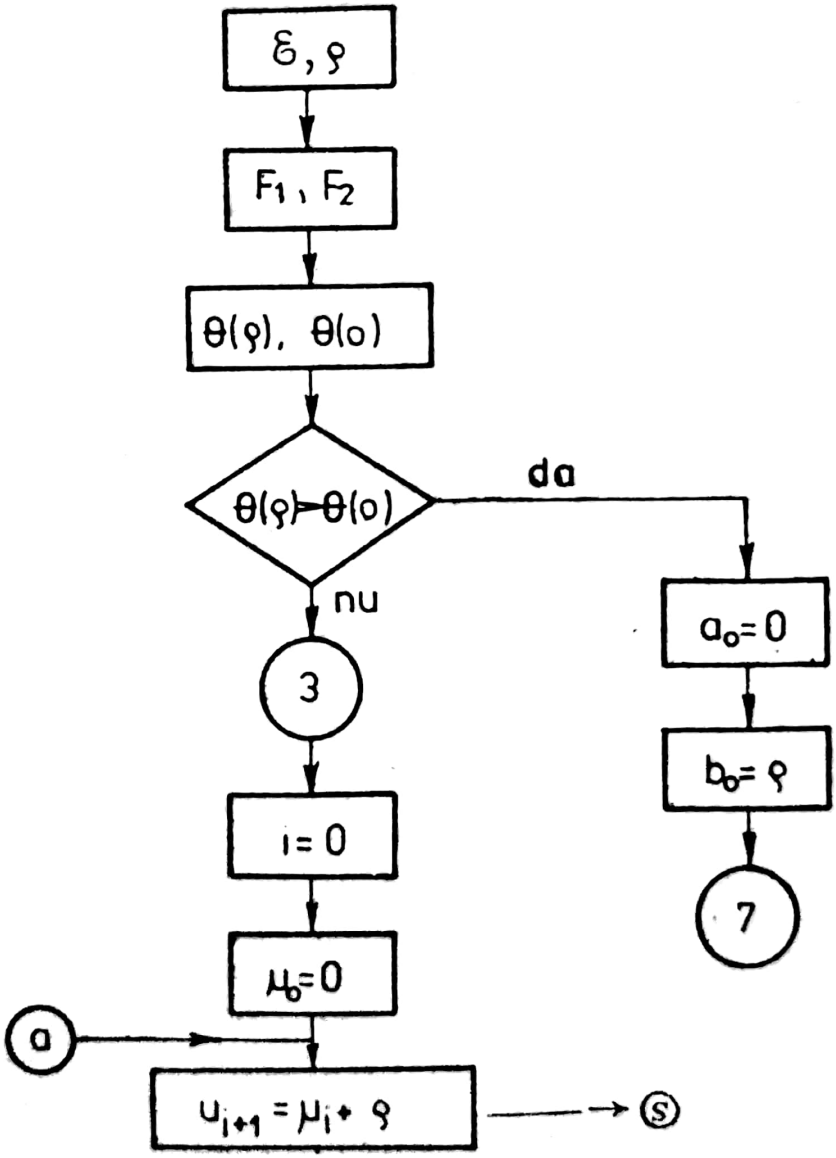
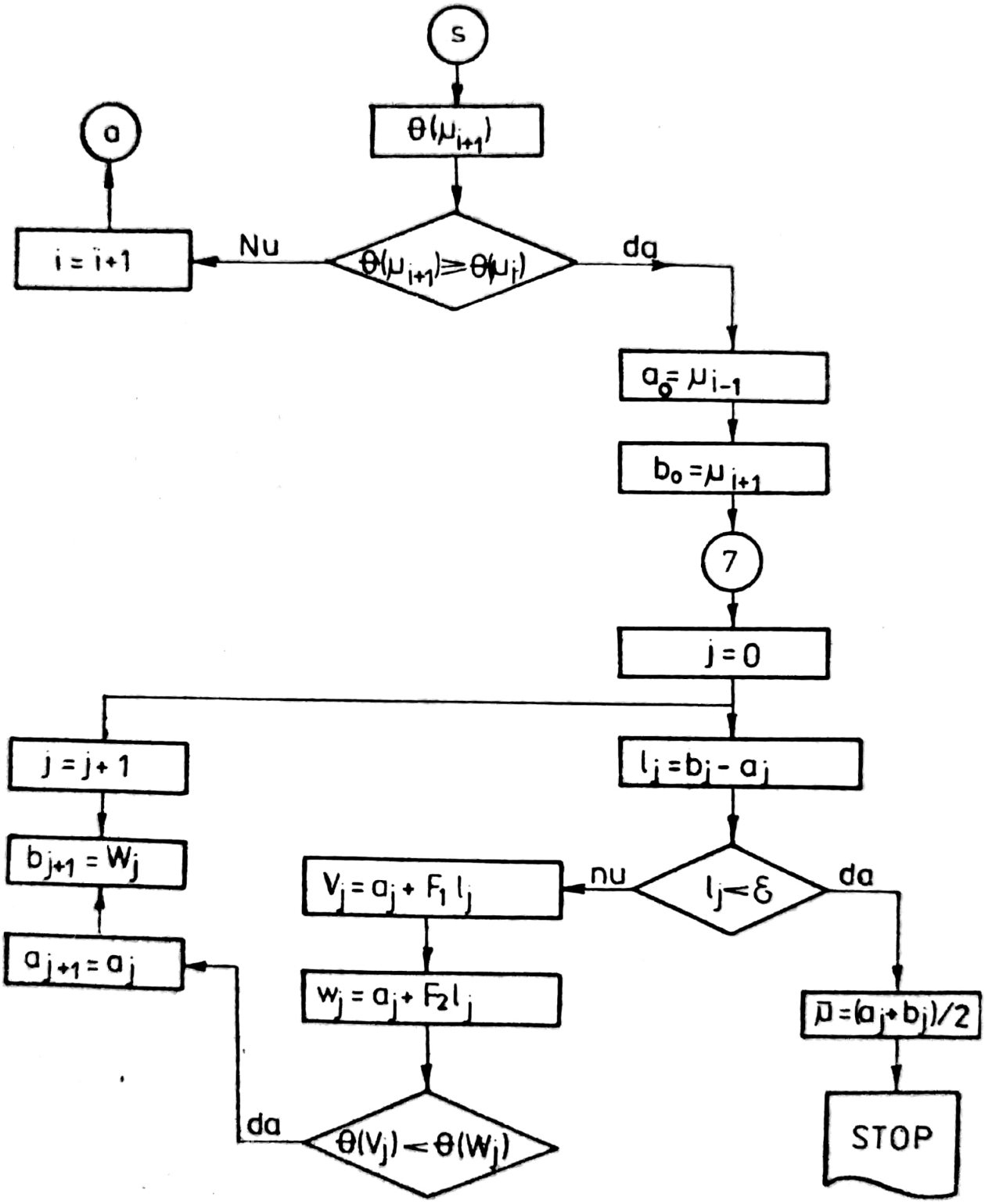


Fig. 2.4.



Scanned with OKEN Scanner

Algoritmul 3. (fig. 2.5).

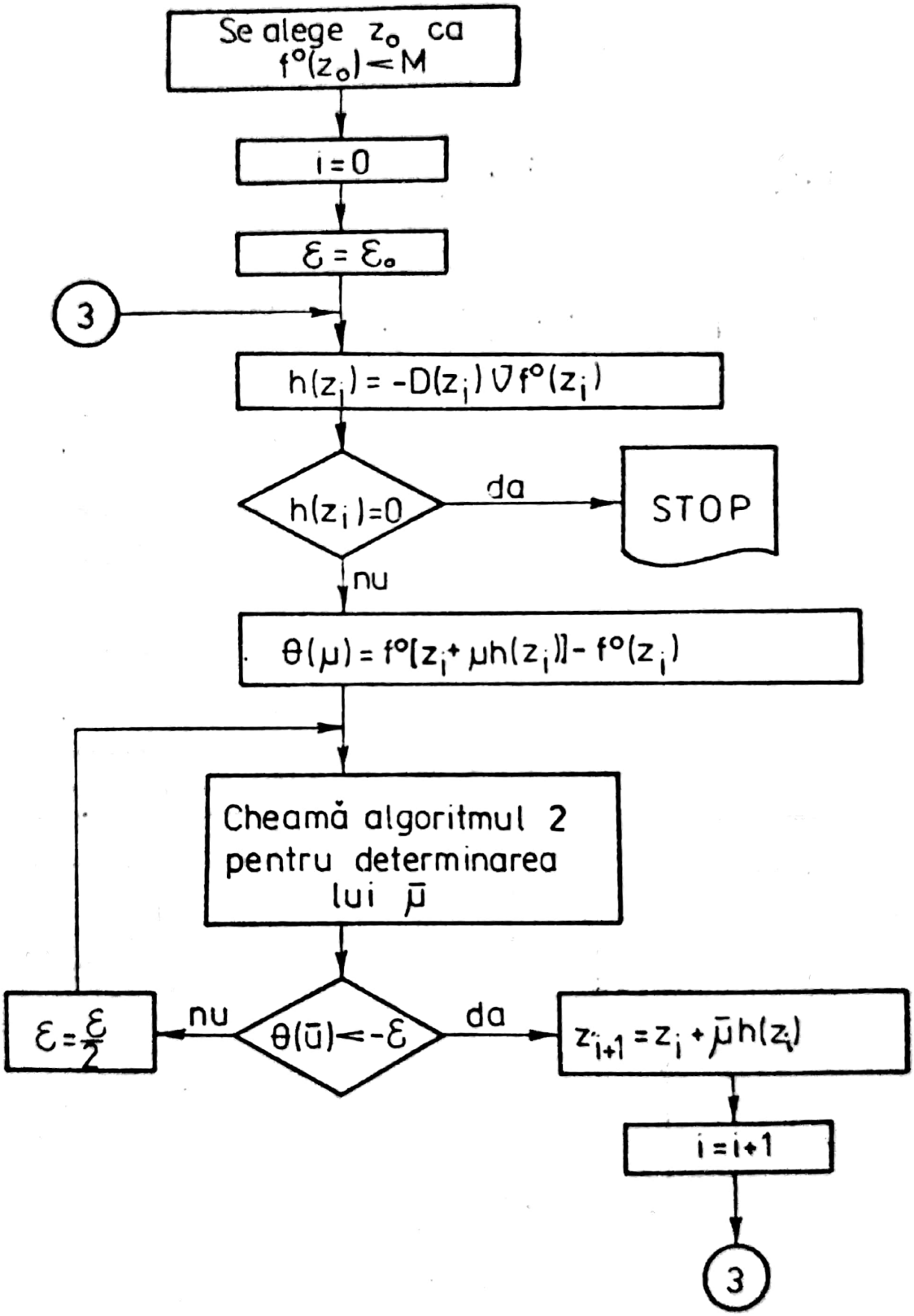


Fig. 2.5.

Scanned with OKEN Scanner

Algoritmul 4. Pasul 0: se alege $z_0 \in R^n$ astfel încît $C(z_0)$ să fie mărginită şi $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Pasul 1: $i=0$. Pasul 2: se calculează $-D(z_i) \cdot \nabla f^0(z_i)$. Pasul 3: se ia $h(z_i) = -D(z_i) \nabla f^0(z_i)$. Dacă $h(z_i)=0$ stop, dacă nu, se trece la pasul următor. Pasl 4: se alege $\lambda_i > 0$ astfel încît: $\lambda_i(1-\alpha) \cdot \langle \nabla f^0(z_i), h(z_i) \rangle \leqslant \theta(\lambda_i, z_i) \leqslant \lambda_i \alpha \cdot \langle \nabla f^0(z_i), h(z_i) \rangle$; unde $\theta(\lambda_i, z_i) = f^0(z_i + \lambda_i h(z_i)) - f^0(z_i)$. Pasul 5: punem $z_{i+1} = z_i + \lambda_i h(z_i)$; $i = i+1$ şi se trece la pasul 2.

Algoritmul 5. Fie f^0 o funcţie continuă, diferenţiabilă avînd matricea Hese $\frac{\partial^2 f^0(z)}{\partial z^2}$ nedegenerată. Dezvoltînd pe f^0 în z_i vom avea:

$$f^0(z) = f^0(z_i), + \langle \nabla f^0(z_i), z - z_i \rangle + \frac{1}{2} \langle z - z_i, \frac{\partial^2 f(z_i)}{\partial z^2}(z - z_i) \rangle.$$

Presupuînd că gradientul este zero, atunci vom avea:

$$z_{i+1} = z_i - \left(\frac{\partial^2 f^0(z_i)}{\partial z^2}\right)^{-1} \nabla f^0(z_i).$$

Cu aceste precizări algoritmul are următoarea formulare: Pasul 0: se alege $z_0 \in R^n$. Pasul 1: $i=0$. Pasul 2: se calculează $\nabla f^0(z_i)$. Pasul 3: dacă $\nabla f^0(z_i)=0$ stop, dacă nu se calculează z_{i+1} cu formula $z_{i+1} = z_i - \left(\frac{\partial^2 f^0(z_i)}{\partial z^2}\right)^{-1} \nabla f^0(z_i)$, se pune $i = i+1$ şi se trece la pasul 2

Algoritmul 6 este redat în fig. 2.6 a şi subprogramul 1 fig 2.6 b.

Algoritmul 7 (fig. 2.7)

Algoritmul 8 (metoda varianţei locale)

Pasul 0: se alege $\rho_0 > 0$ şi $z_0 \in R^n$ astfel încît $C(z_0)$ să fie mărginită. Pasul 1: se ia $i=0$, $z = z_0$ şi se calculează $f^0(z)$. Pasul 2: se ia $\rho = \rho_i$. Pasul 3: $j=1$. Pasul 4: $f^0(z + \rho d_j)$. Pasul 5: dacă $f^0(z + \rho d_j) < f^0(z)$ atunci $z = z + \rho d_j$ şi se trece la pasul 3, dacă nu se

Scanned with OKEN Scanner

trece la pasul 6. Pasul 6 : dacă $j<2n$ atunci $j=j+1$ şi se trece la pasul 4, dacă nu se trece la pasul 7. Pasul 7 : $z_{i+1}=z$, $\rho_{i+1}=\frac{\rho}{2}$, $i=i+1$ şi se trece la pasul 2.

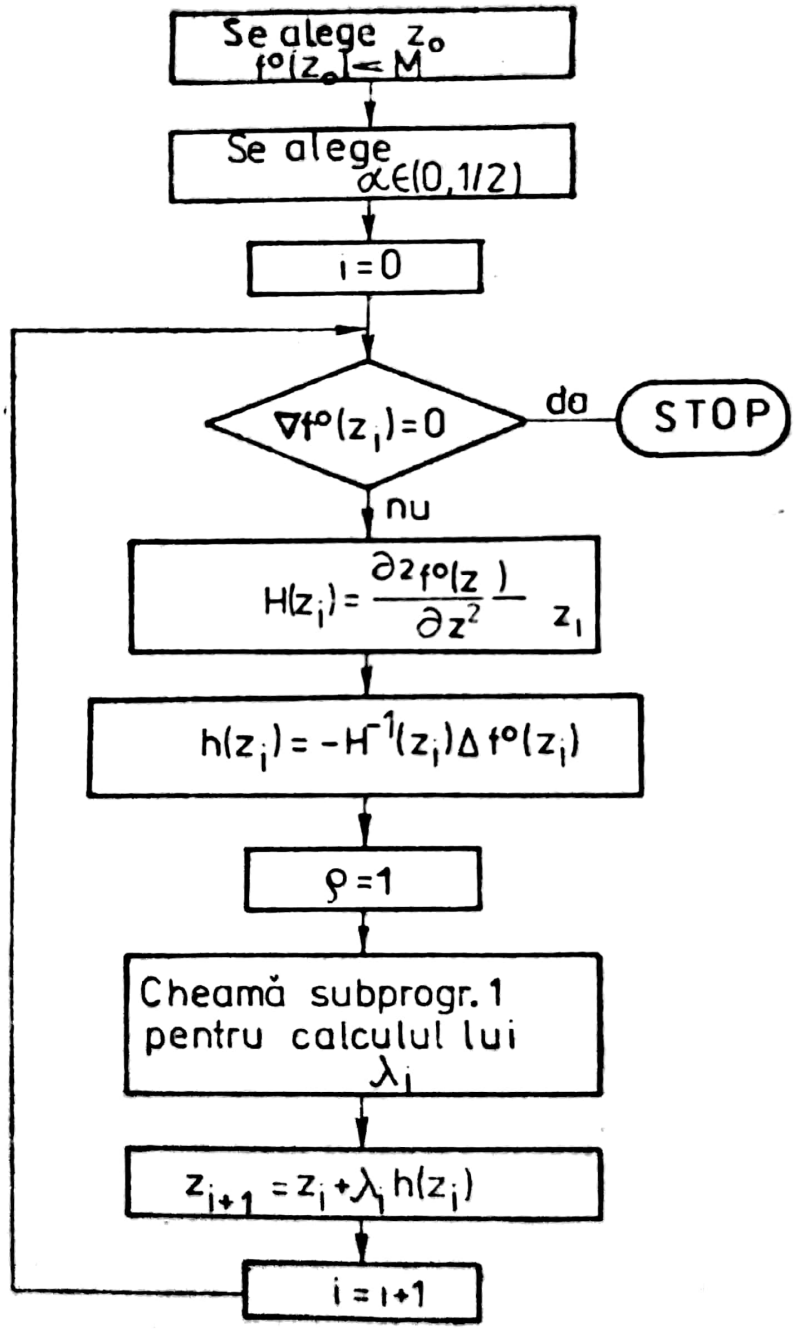


Fig. 2.6a.

Scanned with OKEN Scanner

Subprogramul 1

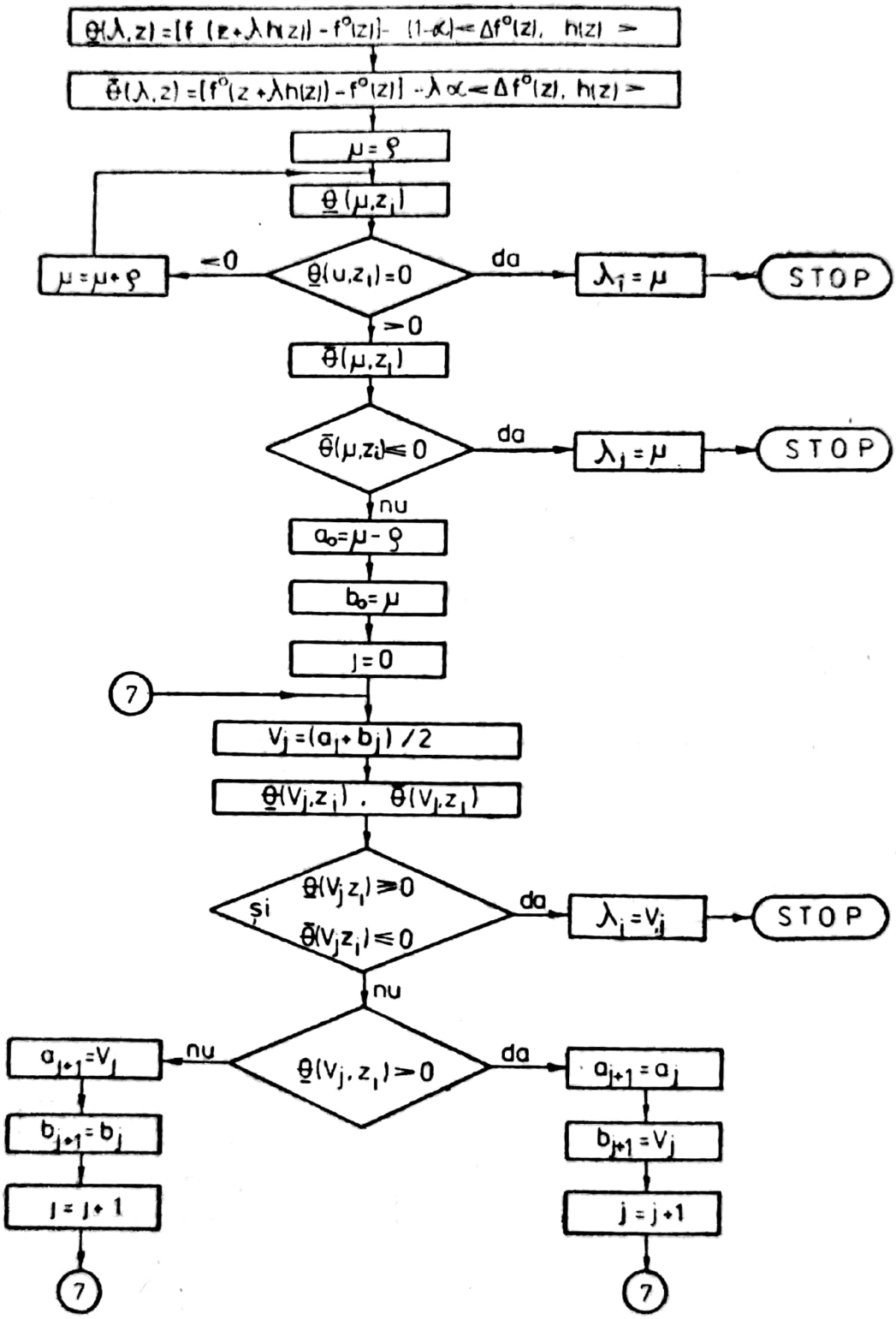


Fig. 2.6 b.

Scanned with OKEN Scanner

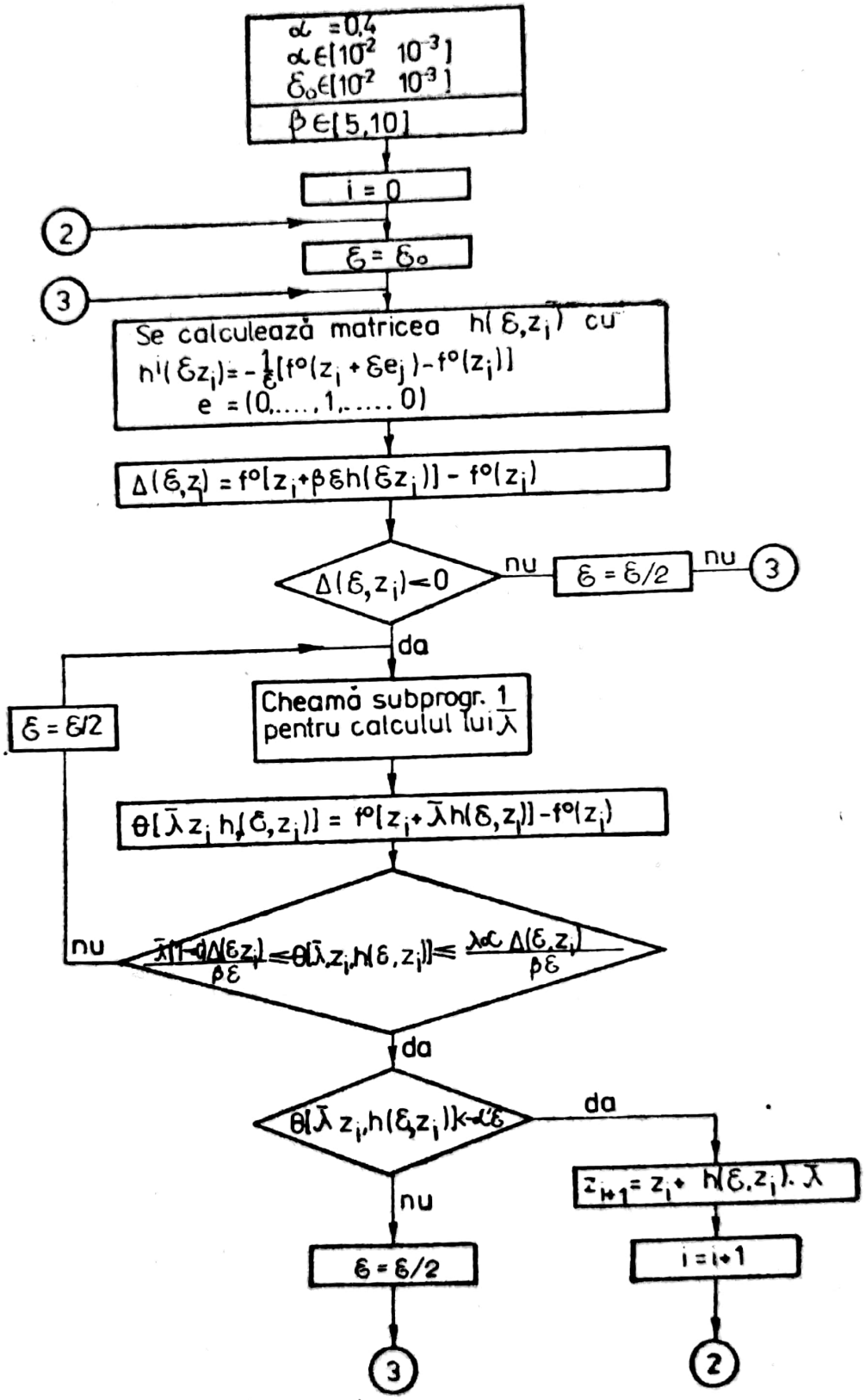

α = 0,4
α ∈ [10^-2 10^-3]
δ₀ ∈ [10^-2 10^-3]
β ∈ [5,10]
i = 0
δ = δ₀
Se calculează matricea h(δ,z_i) cu
h^j(δz_i) = -1/δ [f°(z_i + δe_j) - f°(z_i)]
e = (0,....,1,.....0)
Δ(δ,z_i) = f°[z_i + βδh(δz_i)] - f°(z_i)
Δ(δ,z_i) < 0
nu
δ = δ/2
nu
da
Cheamă subprogr. 1/λ̄
pentru calculul lui λ̄
θ[λ̄ z_i h(δ,z_i)] = f°[z_i + λ̄h(δ,z_i)] - f°(z_i)
nu
da
θ[λ̄ z_i, h(δ,z_i)] k-αδ
da
nu
z_{i+1} = z_i + h(δ,z_i) · λ̄
i = i+1
δ = δ/2

Fig. 2.7.

Algoritmul 9 (tip gradient, fig. 2.9).

Algoritmul 10 (tip cuasi-newtonian). Pasul 0 : $z_0 \in R^n$, $\beta \in (0{,}5\ ;\ 0{,}8)$, $i=0$. Pasul 1 : se calculează $\nabla f^0(z_i)$. Pasul 2: dacă $\nabla f^0(z_i)=0$ stop, altfel se trece la pasul 3. Pasul 3 : se calculează $H(z_i)=\frac{\partial^2 f^0(z_i)}{\partial z^2}$. Pasul 4: dacă există $H(z_i)^{-1}$, atunci $h(z_i)$ se obține rezolvînd $H(z_i)\ h(z_i)=-\nabla f^0(z_i)$ și se trece la pasul 5. Dacă nu $h(z_i)=-\nabla f^0(z_i)$ și se trece tot la pasul 5. Pasul 5 : $\lambda=1$. Pasul 6 : se calculează $\nabla = f^0(z_i+\lambda h(z_i))-f^0(z_i)-\frac{\lambda}{2}\cdot <\nabla f^0(z_i),\ h(z_i)>$. Pasul 7 : dacă $\nabla \leqslant 0$, atunci se pune $\lambda_i=\lambda$ și se trece la pasul 8, dacă nu se pune $\lambda=\lambda\beta$ și se trece la pasul 6. Pasul 8 : se pune $z_{i+1}=z_i+\lambda_i h(z_i)$, $i=i+1$ și se trece la pasul 1.

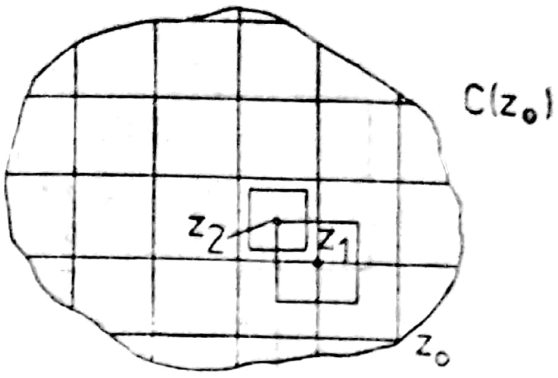


Fig. 2.8.

Algoritmul 11 (metoda penalizării interioare, fig. 2.10). Se consideră sistemul $\mathcal{S}(., E_3)$ scris sub formă scalară

$$(E_3)\begin{cases} F(\bar{x})\to min \\ g_i(\bar{x})\leqslant 0, \quad i=\overline{1,m} \\ l_i(\bar{x})=0, \quad i=\overline{1,r}. \end{cases}$$

Observația 2.17

1) Se ia $c<1$.

2) *Punctul de start.* Din presupuneri inginerești se alege $\bar{x}_0$ care satisface $g_i(\bar{x})<0$; $i=\overline{0,r}$, dar $g_i(\bar{x}_0)>0$ pentru $i>r+1$. Fie k valoarea pentru care $g_k(\bar{x}_0)$ este cea mai mare. În acest caz se caută o soluție pentru care

$$\begin{cases} g_k(\bar{x})\to min, \\ g_i(\bar{x})\leqslant 0, \quad i=\overline{1,r}, \\ g_i(\bar{x})-g_i(\bar{x}_0)\leqslant 0, \quad i=\overline{r+1,m}. \end{cases}$$

Procedura se repetă pînă sînt îndeplinite restricțiile.

Scanned with OKEN Scanner

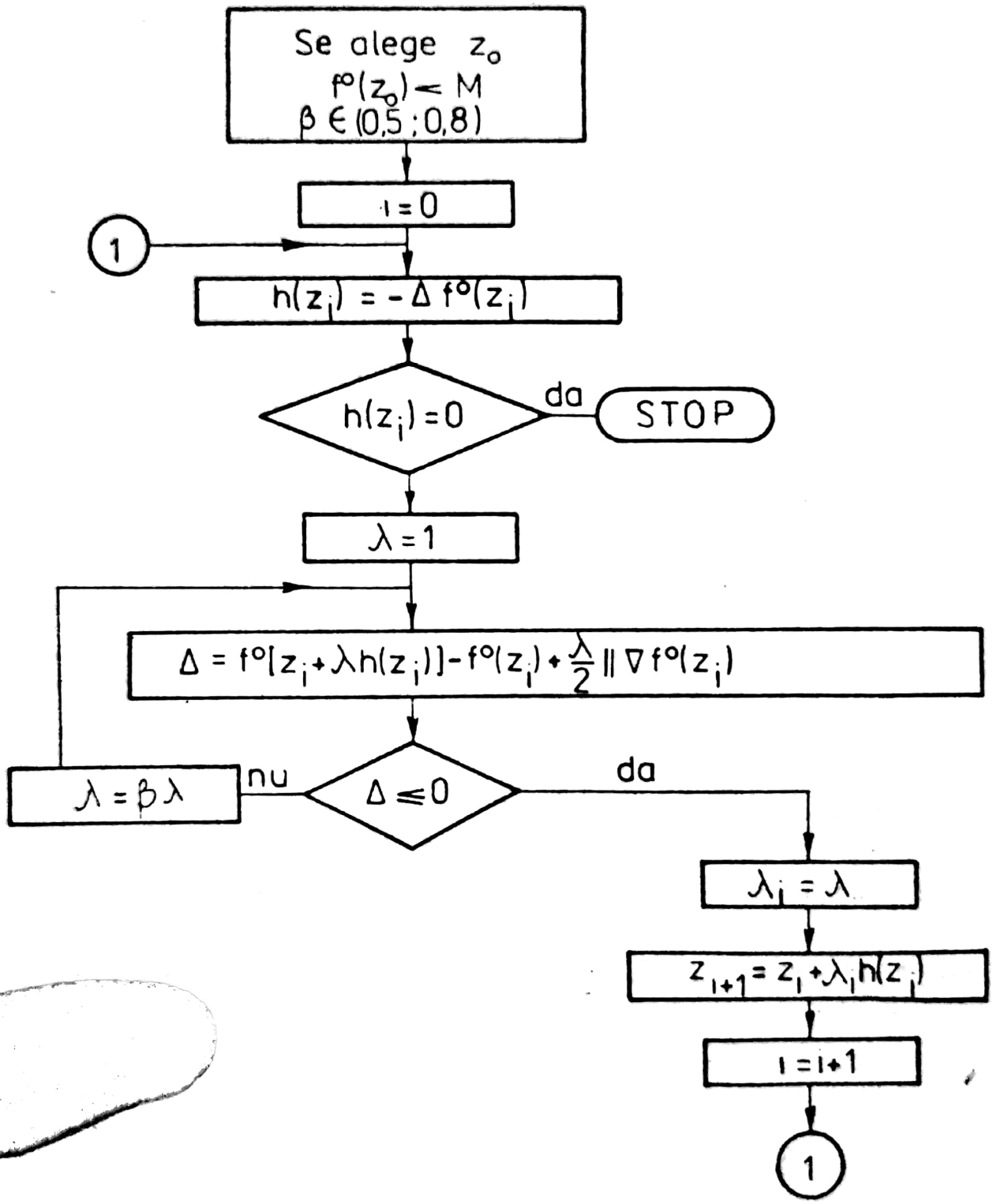


Fig. 2.9.

Scanned with OKEN Scanner

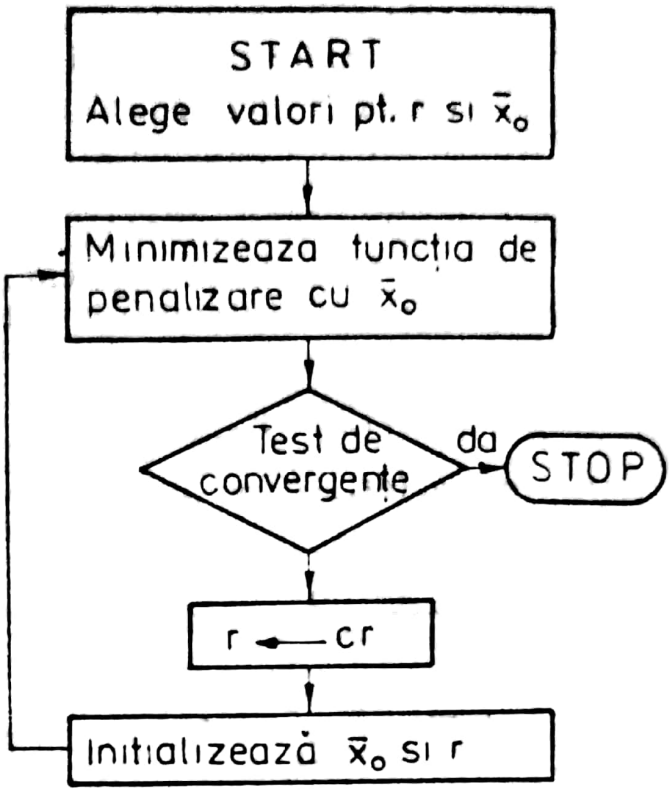


Fig. 2.10.

3) *Alegerea lui r.* Cu ajutorul lui r se construieşte funcţia de penalizare.

4) *Criteriu de convergenţă.* Dacă funcţia de penalizare φ este minimizată pentru diferite valori descrescătoare a lui r, atunci secvenţa de minim $\bar{x}_{min}(r_i)$, $i=1, 2, \ldots$ va fi convergentă dacă este satisfăcut testul

$$\delta \equiv \frac{|F_m(r_{i-1}) - F_m(r_i)|}{|F_m(r_i)|},$$

numit magnitudine (care trebuie să fie în relaţie cu c), test ce stă la baza criteriilor de convergenţă. Pot fi concepute de asemenea şi alte teste, ca de exemplu, dacă calculăm

$$\bar{\Delta} = \bar{x}_{min}(r_{i-1}) - \bar{x}_{min}(r_i),$$

atunci putem impune un test de convergenţă $|\Delta_i| \leqslant \varepsilon_i$; $i=\overline{1, n}$ sau $\max\limits_i (\Delta_i) < \varepsilon$ sau $|\Delta_i| = \left[\sum\limits_{i=1}^{m} \Delta_i^2\right]^{1/2}$.

O altă posibilitatea de aplicare a metodei constă în observaţia că $F_{min}(r_i)$ poate fi considerată ca o funcţie continuă de r notată

$F_{min}(r)$. Această funcție poate fi aproximată printr-o funcție $h(r)$ extrapolată prin una sau mai multe minimizări. $F_{min}(0) \equiv F_{optim}$.

Experiența computațională a demonstrat că $h(r)$ este un polinom, în $r^{1/2}$. În [190], h este un polinom generalizat de forma

$$h_p(r) = a_0 + a_1 r^{1/2} + a_2 r + a_3 r^{3/2} + \ldots + a_p r^{p/2},$$

unde a_p se calculează recursiv. În particular, putem lua un polinom în $r^{1/2}$; $h(r) = a + br^{1/2} \simeq F_{min}(r)$ unde aproximația este determinată prin interpolare

$$h_i(r_{i-1}) = a_i + b_i r_{i-1}^{1/2} = F_{min}(r_{i-1}),$$

$$h_i(r_i) = a_i + b_i (c r_{i-1})^{1/2} = F_{min}(r_i),$$

iar

$$a_i = \frac{[c^{1/2} F_{min}(r_{i-1}) - F_{m.n}(r_i)]}{c^{1/2} - 1},$$

$$b_i = \frac{F_{min}(r_{i-1}) - a_i}{r_{i-1}^{1/2}}.$$

Algoritmul 12 (căutarea sistematică, fig. 2.11). Fie $\mathcal{S}(., P)$

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} f(x) \to min \\ \varphi_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, m} \\ \varphi_i(x) \geqslant 0, \quad i = \overline{m+1, p}. \end{cases}$$

Pasul 1 : se determină valorile pe care le poate avea fiecare variabilă $x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(r)})$. Pasul 2 : se construiește șirul valorilor variabilelor și se determină punctele x care verifică $\varphi(x) = 0$, $\varphi(x) \geqslant 0$. Dacă una din restricții nu este îndeplinită, acel punct se elimină. Pasul 3 : pentru punctele x care verifică relațiile $\varphi(x) = 0$, $\varphi(x) \geqslant 0$ se calculează optimul funcției. De fiecare dată valoarea funcției f se compară cu valoarea inițială f_0 și se tipărește rezultatul.

Algoritmul 13 (jocuri matriciale). Fie jocul matricial :

$$\| a \| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

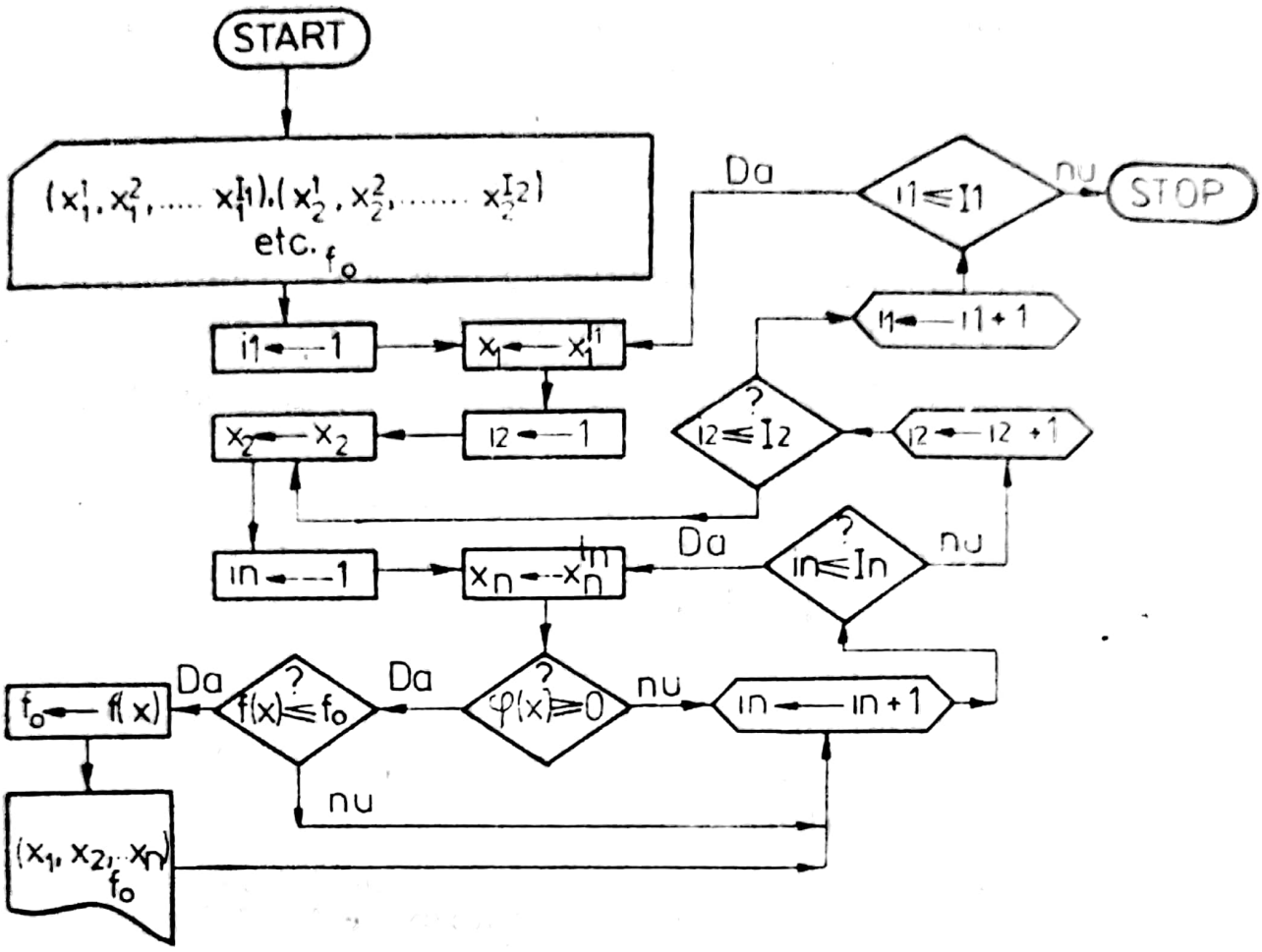


Fig. 2.11.

Pasul 1 : se alege o matrice pătrată $\| b \|$ de ordinul $r \geqslant 2$ din $\|a\|$ începînd cu $r = min\,(m, n)$, m fiind numărul liniilor lui $\| a \|$, iar n numărul coloanelor. Paul 2 : se calculează

$$\| \tilde{x} \| = \frac{\| j_r \| \, \| b \|^{\Gamma}}{\| j_r \| \, \| b \|^{\Gamma} \| j_r \|'} = \| x_{r_1} \, x_{r_2} \ldots x_{r_r} \| ,$$

$$\| \tilde{y} \| = \frac{\| j_r \| \, (\| b \|')^{\Gamma}}{\| j_r \| \, (\| b \|') \, \| j_r' \|} = \| y_{r_1} \, y_{r_2} \ldots y_{r_r} \|,$$

unde :

$\| j_r \| = \| 1 \quad 1 \ldots 1 \|$ o matrice $1 \times r$,

$\| b \|^{\Gamma}$ matricea adjunctă a lui $\| b \|$,

$\| b \|'$ matricea transpusă a matricei $\| b \|$.

Scanned with OKEN Scanner

Pasul 3 : dacă unii x_r (y_r) sînt negativi, alegem o altă matrice pătrată din $\| a \|$. Pasul 4 : dacă toţi $x_{r_i} \geqslant 0$, $i=\overline{1, r}$ ($y_{r_i} \geqslant 0$), se calculează

$$W = \frac{\det \| b \|}{\| j_r \| \, \| b \|^{r} \, \| j_r \|'}.$$

Pasul 5 : se constuiesc matricile $\| x \|$ şi $\| y \|$ corespunzînd lui $\| \tilde{x} \|$ şi $\| \tilde{y} \|$ (adică se adaugă zerourile la locurile corespunzătoare).

Pasul 6 : dacă $\| x \|$ şi $\| y \|$ satisfac relaţiile : $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geqslant W$ pentru orice $j=\overline{1, n}$ şi $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leqslant W$ pentru orice $i=\overline{1, m}$, atunci $\| x \| = \| x^* \|$, $\| y \| = \| y^* \|$, $W=v$, dacă nu se trece la o altă matrice $\| b \|$ şi revenim la pasul 2.

Algoritm de programare dinamică

Aceşti algoritmi se aplică sistemelor extremele secvenţionale. Pentru detalii de calcul se poate consulta [16, 18, 28, 55, 186].

Programe de calculator

Un mare număr de programe de programare matematică sînt prevăzute pentru calculatoarele numerice existente. Multe programe sînt extrem de suple şi generează informaţii auxiliare ce pot fi extrem de folositoare. Din această cauză se prezintă bibliografia programelor de calculator, spre a servi inginerilor interesaţi în obţinerea unor răspunsuri în asemenea probleme : [32, 40, 58, 63, 111, 117 182, 191, 192, 193].

2.1.4. SISTEME EXTREMALE NECONVEXE

Deşi convexitatea este o proprietate avantajossă, totuşi multe sisteme reale nu sînt convexe [168]. Totodată testarea convexităţii unui sistem neliniar nu este un lucru prea simplu, deoarece nu există metode comode de testare a convexităţii unei funcţii neliniare.

Din această cauză, de multe ori înlocuim sistemul neconvex printr-un sistem convex, deoarece rezultatele obţinute pentru sistemul convex permit înţelegerea proprietăţilor unor sisteme mai

Scanned with OKEN Scanner

generale, în același timp rezultatele pot fi transpuse într-o formă mai slabă sistemului neconvex

Ivar Ekeland și Jean Pierre Aubin studiază proprietățiile funcțiilor neconvexe în raport cu proprietățile funcțiilor convexe, ajungînd la următoarea concluzie. Funcțiile neconvexe verifică cu o eroare proprietățile funcțiilor convexe. Ei pun în evidență această abatere prin

$$\rho(f) = \sup_{\substack{\text{combinații} \\ \text{convexe}}} \left(f\left(\Sigma \alpha_i x_i\right) - \Sigma\, \alpha_i f(x_i)\right) \tag{2.46}$$

Observația 2.18. Dacă funcția g este convexă, atunci avem

$$\inf_{x \in R^m} (f(x) + g(x) \leqslant -\inf_{p \in R^{m*}} (f^*(p) + g^*(-p)) + \rho(f).$$

Observația 2.19. Dacă $\rho(f) = 0$, atunci regăsim teorema de dualitate a lui Fenchel.

Observația 2.20. Dacă f se poate scrie sub forma

$$f(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} f_t(x_t), \quad f_t : R^{m_t} \to]-\infty, +\infty]$$

și dacă $T \geqslant m$, avem

$$\inf_{x_t \in R^m} \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} f_t(x_t) + g\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant -\inf_{p \in R^{m*}} \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} f_t^*(p) + g^*(-p)\right] + \frac{m}{T} \sup_t \rho(f_t).$$

Se consideră mulțimea convexă X din spațiul vectorial V, submulțimea $M(X)$ de măsuri discrete de probabilități $m = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta(x_i)$; ($\delta(x_i)$ fiind măsura lui Dirac, $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$) și operatorul $\beta : M(X) \to X$; $m = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta(x_i) \xrightarrow{\beta} \beta_m = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$.

Definiția 2.12. Se numește modul de neconvexitate a funcției numerice $f : X \to R$ și se notează cu $\rho(f)$ scalarul $\rho(f) = \sup_{m \in M(X)} (f(\beta_m) - \langle m, f \rangle)$, unde $\langle m, f \rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i)$, dacă $m = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta(x_i)$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $f: R^m \to]-\infty, +\infty]$ și $g: R^n \to]-\infty, \infty]$ două funcții semicontinue inferior și operatorul liniar A, $A \in L(R^m, R^n)$. O problemă importantă constă în evaluarea lui $v = \inf\limits_{x \in R^m} (f(x) + g(Ax))$ în raport cu $v^* = -\inf\limits_{p \in R^n} (f^*(A^*p) + g^*(-p))$, unde: $A^* \in L(R^{n*}, R^{m*})$; $f^*(g) = \sup\limits_{x \in R^m} (\langle g, x \rangle - f(x))$, $g \in R^{m*}$; $g^*(p) = \sup\limits_{y \in R^n} [\langle p, y \rangle - g(y)]$, $p \in R^{n*}$.

Folosind teorema lui Shapley-Folkman se poate demonstra următorul rezultat, important pentru numeroase aplicații.

Teorema 2.14. Dacă sînt satisfăcute condițiile

1) $R^m = \prod\limits_{t=1}^{T} R^{m_t}$,

2) $f(x) = \sum\limits_{t=1}^{T} f_t(x_t)$; $f_t: R^{m_t} \to]-\infty, +\infty]$,

3) $Ax = \sum\limits_{t=1}^{T} A_t x_t$; $A_t \in L(R^{m_t}, R^n)$,

4) Funcția g este convexă,

5) Domeniul lui f este convex,

6) $0 \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} g \setminus \operatorname{Dom} f)$,

există $\bar{p} \in R^{n*}$ astfel ca

$$\inf_{x_t \in R^{m_t}} \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} f_t(x_t)\right) + g\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} A_t x_t\right) \leqslant -(g^*(-\bar{p}) +$$

$$+ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} f_t^*(A_t^* \bar{p}) + \frac{n+1}{T} \sup_{1 \leq t \leq T} \rho(f_t).$$

Demonstrație. Fie spațiul $R \times R^n$; vectorul $\theta = (1, 0) \in R \times R^n$ și conurile $P = [0, +\infty[\times \{0\}$; $\mathring{P} =]0, \infty[\times \{0\}$ din $R \times R^n$.

Se notează: $X = \operatorname{Dom} f \subset R^m$; $Y = \operatorname{Dom} g \subset R^n$, apoi se construiește operatorul $\Phi: X \times Y \to R \times R^n$, unde $\Phi(x, y) = (f(x) + g(y), y = Ax) \in R \times R^n$.

Fie scalarul $w = \inf\limits_{m \in M(X)} [<m, f> + g(A\beta m)]$ astfel ca

$$w\theta \notin co\,[\Phi(X \times Y)] + \overset{0}{P}, \tag{2.47}$$

$$(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (w+\varepsilon)\,\theta \in co\,[\Phi(X \times Y)] + P. \tag{2.48}$$

Să arătăm că w satisface condiţia (2.47). Presupunem că $w\theta \in co\,[\Phi(X+Y)] + \overset{0}{P}$. În acest caz există $x_i \in X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$; $y_i \in Y$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ astfel ca $w > \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i) + \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i g(y_i) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i) + g(\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i y_i)$ şi $0 = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i A x_i$: ($g$ — convexă).

Considerînd $m = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \delta(x_i) \in M(X)$, se obţine

$$w > \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i) + g(A(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i)) = <m, f> + g(A\beta m) \geqslant w,$$

ceea ce este imposibil şi deci (2.47) este demonstrată. Pentru a demonstra proprietatea (2.48) se ţine seama de definiţia lui w, din care se deduce că pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$ există un $m = \sum\limits_{i=1}^{a} \alpha_i \delta(x_i)$, astfel ca

$$<m, f> + g(A\beta m) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (f(x_i) + g(y)) \leqslant w + \varepsilon.$$

Dacă se pune $y = A\beta m$, se obţine: $0 = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i (y - Ax_i)$ şi deci $(w+\varepsilon)\,\theta \in co\,[\Phi(X+Y)] + P$.

Din relaţia (2.47) şi teorema de separaţie se deduce existenţa unei forme liniare nenule $(c, p) \in R^* \times R^{n*}$ astfel încît $<(c, p), w\theta> = c \cdot w \leqslant \inf\limits_{\substack{x \in X \\ y \in Y \\ a > 0}} (c(f(x) + g(y)) + <p, y> - Ax + ca)$.

Punînd $\bar{p} = \frac{p}{c}$ în relaţia anterioară, se obţine

$$w \leqslant \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} [f(x) + g(y) + <\bar{p}, y> - <A^*\bar{p}, x>] = -(f^*(A^*\bar{p}) + g^*(-\bar{p})) \leqslant v^*. \tag{2.49}$$

Din (2.48) se poate deduce un minorant a lui w.

Se scrie $co\,[\Phi\,(X\times Y]+P=G+co\sum_{t=1}^{T} F_t$, unde: $G=\{(g\,(y),\,y)\}_{y\in Y}+P$ şi $F_t=\{(f_t\,(x_t),\ -A_t\,x_t\}_{x_t\in X_t}$, X_t fiind Dom f_t. Cu această observaţie, se poate scrie: $(w+\varepsilon)\,\theta=\gamma+\varphi$, unde $\gamma=(g\,(y)+a,\,y)\in G$, iar $\varphi\in co\,(\sum_{t=1}^{T} F_t)\subset R\times R^n$.

Folosind teorema lui Shapley-Folkman, se deduce existenţa unei mulţimi S astfel ca

$$\varphi=\sum_{t\notin S}\varphi_t+\sum_{s\in S}\varphi_s\,;\quad \text{unde}\quad \varphi_t=(f_t\,(x_t),-A_t\,x_t)\in F_t\,,$$

dacă $t\notin S$ şi $\varphi_s=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^s\,[f_s\,(x_s^i),\,-A_s\,(x_s^i)]=(f_s\,(x_s),\,-A_s x_s)-$

$-(f_s\,(\beta m_s)-<m_s,\,f_s>,\,0)\in co\,F_s$, dacă $s\in S$ sau $\varphi=$

$$=\sum_{t=1}^{T}(f_t\,(x_t).-A_t\,x_t)-\sum_{s\in S}(f_s\,(\beta w_s)-<m_s,\,f_s>),\ 0).$$

De asemenea se obţine:

$$w+\varepsilon=g\,(y)+a+\sum_{t=1}^{T} f_t\,(x_t)-\sum_{s\in S}(f_s\,(\beta m_s)-<m_s,\,f_s>)\,;$$

$$0=y-\sum_{t=1}^{T} A_t\,x_t.$$

În final avem:

$$w+\varepsilon=g\,(\sum_{t=1}^{T} A_t\,x_t)+a+\sum_{t=1}^{T} f_t\,(x_t)-\sum_{s\in S}(f_s\,(\beta m_s)-<m_s,\,f_s>\geqslant$$

$$\geqslant v-\sum_{s\in S}\rho\,(f)\geqslant v-(n+1)\sup_s\rho\,(f_s).$$

Deci: $v\leqslant w+(n+1)\sup_t\rho\,(f_t)$ şi teorema este demonstrată.

Observaţia 2.21. Pentru $T=1$, se deduce uşor că $(w+\varepsilon)\,\theta=\gamma+\varphi$, unde $\gamma\in G$; $\varphi\in co\,(F)$. Deci $w+\varepsilon=g\,(Ax)+a+f\,(x)-(f\,(\beta m)-<m,\,f>)\geqslant v-\rho\,(f)$.

Scanned with OKEN Scanner

O a doua cale pe care o schiţăm în continuare, pentru a familiariza cititorul cu rezultatele de bază, este analiza neconvexă dezvoltată de Ivar Ekeland, F. Clarke, A. Hoffman, J. Lasry, L. Neustadt.

Teorema 2.15 Fie V un spaţiu metric complet şi $F: V \to R \cup \{+\infty\}$ o funcţie l.s.c. (convexă semicontinuă) $\neq \infty$ mărginită inferior. Fie $\varepsilon > 0$ dat şi un punct $u \in V$ astfel ca $F(u) \leqslant \inf F + \varepsilon$. În aceste condiţii există un $v \in V$ astfel încît

(1) $F(v) \leqslant F(u)$,

(2) $d(u, v) \leqslant 1$,

(3) $(\forall)\ w \neq v,\ F(w) > F(v) - \varepsilon d(v, w.)$.

Demonstraţie. Definim şirul $(u_n)_{n \in N}$, unde $u_0 = u$. Se presupune că $u_n \in V$. Atunci: a) $(\forall)\ w \neq u_n,\ F(w) > F(u_n) - \varepsilon d(u_n, w)$; deci $u_{n+1} = u_n$. b) $(\forall)\ w \neq u_n$ astfel ca $F(w) \leqslant F(u_n) - \varepsilon d(u_n, w)$. Dacă se notează prin $S_n = \{w : w \in V\}$ şi se alege $u_{n+1} \in S_n$ încît

$$F(u_{n+1}) - \inf_{S_n} f \leqslant \frac{1}{2}[F(u_n) - \inf_{S_n} F], \tag{2.50}$$

atunci şirul este Cauchy. Dacă avem a) şirul este staţionar. În caz contrar, vom avea $\varepsilon d(u_n, u_{n+1}) \leqslant F(u_n) - F(u_{n+1})$; $n \in N$ şi deci

$$\varepsilon d(u_n, u_p) \leqslant F(u_n) - F(u_p)\ ;\ n \leqslant p. \tag{2.51}$$

Şirul $F(u_n)$ este descrescător şi mărginit, deci este convergent. Partea dreaptă converge la zero cu (n, p), fapt care conduce la concluzia că u_n este şir Cauchy. Deoarece V este spaţiu complet, avem $u_n \to v \in V$.

Să arătăm în continuare că v satisface condiţiile (1) (2), (3).

Condiţia (1) este satisfăcută deoarece şirul $F(u_n)$ este descrescător, iar F este semicontinuă, deci $F(v) \leqslant \lim_n F(u_n)$.

Inegalitatea (2) se obţine din (2.51) pentru $n = 0$ şi $p \to \infty$; $\varepsilon d(u, u_p) \leqslant F(u) - F(u_p) \leqslant F(u) - \inf_V F < \varepsilon$.

Pentru a demonstra (3) se presupune că relaţia nu ar fi adevărată. În această ipoteză avem $w \neq v$, $F(w) \leqslant F(v) - \varepsilon d(v, w)$. Pentru $p \to \infty$, din (2.51) se deduce că $F(w) \leqslant \lim F(u_p) \leqslant F(u_n) - \varepsilon d(u_n, w)$, adică $w \in S_n$ pentru orice $n \in N$. În aceste condiţii, relaţia (2.50) poate fi scrisă $2F(u_{n+1}) - F(u_n) \leqslant \inf_{S_n} F \leqslant F(w)$.

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, cînd $n \to \infty$ avem $F(u_n) \to l$ şi $l < F(w)$. Ţinînd cont de faptul că F este convexă şi semicontinuă vom avea de asemenea $F(v) \leqslant l$.

În final $F(v) \leqslant F(w)$, fapt care contrazice modul în care a fost definit w, deci relaţia (3) este adevărată.

Corolar 2.1. Fie V un spaţiu metric complet şi $F: V \to R \cup \{+\infty\}$ o funcţie convexă semicontinuă $\not\equiv \infty$, mărginită inferior. Pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$, există uu punct $v \in V$ astfel ca

$$F(v) \leqslant \inf_V F + \varepsilon,$$

$$(\forall)\ w \in V;\ F(w) \geqslant F(v) - \varepsilon d(u, w).$$

Teorema 2.16. Fie V o submulţime convexă închisă a unui spaţiu Banach. Orice aplicaţie continuă $f: V \to V$ care satisface condiţia $(\exists)\ \sigma < 1$; $(\forall)\ u \in V$; $(\exists)\ t \in (0, 1]$; $\| f(u_t) - f(u) \| \leqslant \sigma \| u_t - u \|$, unde $u_t = tf(u) + (1-t)u$; $0 \leqslant t \leqslant 1$, are punct fix: $(\exists)\ v \in V$; $f(v) = v$.

Demonstraţie. Se aplică corolarul (2.1) funcţiei $F(w) = \| w - f(w.) \|$ cu $0 < \varepsilon < 1 - \sigma$. Deoarece funcţiile f şi F sînt continue, avem un $v \in V$ astfel încît $(\forall)\ w \in V$, $\| w - f(w) \| \geqslant \| v - f(v) \| - \varepsilon \| v - w \|$. Se presupune că pentru $t \in (0, 1]$ avem $\| f(v\ ) - f(v) \| \leqslant \sigma \cdot t \| f(v) - v \|$. Luînd $w = v_t$, se obţine $\| v - f(v) \| \leqslant \| v_t - f(v_t) \| + \varepsilon \| v - v_t \| \leqslant \| v_t - f(v) \| + \| f(v) - f(v_t) \| + \varepsilon \| v - v_t \| \leqslant \| v_t - f(v) \| + \sigma \cdot t \| f(v) - v \| + \varepsilon t \| f(v) - v \|$. Deoarece v_t se află pe $[v, f(v)]$, avem $\| v - f(v) \| = \| v - v_t \| + \| v_t - f(v) \| = t \| f(v) - v_t \| + \| v_t - f(v) \|$. Deci $t \| f(v) - v \| \leqslant (\sigma + \varepsilon) t \| f(v) - v \|$ cu $t > 0$, deci $\| f(v) - v \| \leqslant (\sigma + \varepsilon) \| f(v) - v \|$. Deoarece $\sigma + \varepsilon < 1$, rezultă că $f(v) = v$.

Definiţia 2.13. Se spune că $F: V \to R$ este diferenţiabilă în sens Gâteaux, dacă pentru fiecare $v \in V$ există o funcţională liniară continuă $F'(v) \in V^*$ astfel încît să avem

$$(\forall)\ u \in V \lim_{t \to 0_+} \frac{1}{t} [F(v + tu) - F(v)] = \langle F'(v), u \rangle.$$

Teorema 2.17. Fie V un spaţiu Banach şi F o funcţie mărginită inferior, Gateaux diferenţiabilă pe V. Pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$ $(\exists)\ v \in V$ astfel ca

$$F(v) \leqslant \inf_V F + \varepsilon,$$

$$\| F'(v) \|^* \leqslant \varepsilon.$$

Demonstrație. Dacă se aplică corolarul (2.1), se constată că $(\exists)\ v \in V$ astfel ca $(\forall)\ w \in V$, $F(w) \geqslant F(v) - \varepsilon \| w - v \|$. Luînd $u \in V$, $w = v + tu$ și $t > 0$ se obține

$$\frac{1}{t}[F(v+tu) - F(v)] \leqslant -\varepsilon \| u \|.$$

Pentru $t \to 0_+$ vom pune $\langle F'(v), u \rangle \geqslant -\varepsilon \| u \|$. Trecînd la infimum pentru toți $u \in V$ cu $\| u \| = 1$ se obține

$$-\| F'(v) \|^* \geqslant -\varepsilon.$$

Teorema 2.18. Fie F o funcție mărginită inferior, Gâteaux diferențiabilă pe un spațiu Banach V satisfăcînd condiția: dacă $F'(u_n) \to 0$ în V^* și $F(u_n)$ este mărginită, atunci de fiecare dată cînd $F'(u_n) = 0$, u_n are un punct de acumulare în V. În aceste condiții funcția F își atinge minimul

$$(\exists)\ v \in V;\ F(v) = \inf_{u \in V} F(u) \text{ și } F'(v) = 0.$$

Demonstrație. Din corolarul 2.1 rezultă existența unui șir u_n în V încît: $F'(u_n) \to 0$ și $F(u_n) \to \inf_v F$. Pe de altă parte, se poate extrage un subșir (notat u_n) astfel ca $F'(u_n) \neq 0$ pentru $(\forall)\ n \in N$, sau $F'(u_n) = 0$ pentru un n finit. În primul caz u_n are un punct de acumulare v la care converge subșirul și în ipoteza continuității lui F; $F(v) = \lim_n F(u_n) = \inf_V F$.

În cazul al doilea, dacă se notează prin S mulțimea $S = \{v \in V : F'(v) = 0\}$, atunci pentru fiecare n există un drum C' ce leagă u_n cu v_n pe frontiera lui S astfel ca $F(u_n) = F(v_n)$. Deoarece $u_n \in F_r S$, $(\exists)\ w \notin S$ încît $| F(v_n) - F(w_n) | < \frac{1}{n}$. Evident $F'(w_n) \neq 0$ și $F(w_n) \to \inf_v F$, fiind astfel în cazul precedent.

Teorema 2.19 Fie F o funcție Gâteaux diferențiabilă pe spațiul Banach V și Φ o fucție continuă pe $[0, +\infty)$ astfel ca

$$(\forall)\ v \in V;\ F(v) \geqslant \Phi(\| v \|),$$

$$\frac{\Phi(t)}{t} \to \infty, \text{ cînd } t \to \infty,$$

atunci $F'(V)$ este densă în V^*.

Demonstrație. Fie $v^* \in V^*$ și $\varepsilon > 0$. Se consideră funcția $G(v) = F(v) - \langle v^*, v \rangle$ mărginită inferior, convexă și semicontinuă.

Din corolarul 2.1 $(\exists)$ $v \in V$ astfel ca $\| G'(v) \|^* = \| F'(v) - v^* \|^* \leqslant \varepsilon$. Să înzestrăm spaţiul V cu o nouă distanţă λd. Pentru $\lambda > 0$ (λd este o distanţă bona-fide), V este complet. Cu aceste precizări se poate aplica teorema 2.15 spaţiului metric $(V, \lambda d)$ în care

$$(2') \quad d(u, v) \leqslant \frac{1}{\lambda},$$

$$(3') \quad (\forall)\ w \neq v\ ;\ F(w) > F(v) - \varepsilon\lambda\, d(u, w).$$

Dacă se alege $\lambda = \varepsilon^{-1/2}$, atunci se obţine următorul.

Corolar 2.2. Fie V un spaţiu metric complet şi $F : V \to R \cup \{+\infty\}$ o funcţie convexă, semicontinuă $\not\equiv \infty$. Dacă $u \in V$ astfel ca $F(u) \in \inf_V F + \varepsilon$, atunci $(\exists)$ $v \in V$ încît $F(v) \leqslant F(u)$; $d(u, v) \leqslant \sqrt{\varepsilon}$; $w \neq v$, $F(w)\, F(v) > -\sqrt{\varepsilon}\ d(v, w)$.

Frank Clarke dezvoltă metoda şi găseşte următoarele condiţii de optimalitate :

1) v minimizează funcţia G, definită astfel $G(w) = F(w) + \sqrt{\varepsilon}\, d(v, w)$ (G fiind o perturbare uşoară a funcţiei originale F).

2) Pentru orice funcţie f local Lipschitziană, definită pe un spaţiu Banach şi orice punct $x \in E$ se poate asocia o submulţime compactă tare conve ă $\partial f(x)$ în E^*.

Teorema 2.20. Fie F o funcţie convexă, semicontinuă, definită pe spaţiul Babach V. Dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate găsi o funcţie F_ε Gâteaux diferenţiabilă, astfel încît să avem

$$(2.52) \qquad F \leqslant F_\varepsilon \text{ şi } \inf F_\varepsilon \geqslant \inf F - \varepsilon$$

$$(2.53) \qquad F'_\varepsilon(v) \to \Phi(u) \text{ cînd } \varepsilon \to 0 \text{ şi } v \to u,$$

atunci $(\forall)$ $u \in V$ care minimizează pe F satisface ecuaţia

$$(2.54) \qquad \Phi(u) = 0 \text{ în } V^*.$$

Demonstraţie. Presupunem că u minimizează F pe V. Din (2.52) deducem că $F_\varepsilon(u) \leqslant \inf_v F + \varepsilon$. Din coloralul 2.2 rezultă că $(\exists)$ $v_\varepsilon \in V$ astfel ca $\| u - v_\varepsilon \| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$, v_ε minimizînd pe V funcţionala $G_\varepsilon(w) = F_\varepsilon(w) + \sqrt{\varepsilon}\, \| v_\varepsilon - w \|$. F_ε este diferenţiabilă în raport cu v_ε. Funcţia $w \to \| v_\varepsilon - w \|$ avînd $+1$ ca derivată direcţională în orice direcţie, nu este diferenţiabilă în raport cu v_ε. Pe de altă parte, v_ε trebuie să satisfacă condiţia (*) $F'_\varepsilon(v_\varepsilon) +$

$+\sqrt{\varepsilon}\, B^* \ni 0$, B^* fiind bila unitate în V^*. Dacă $\varepsilon \to 0$, atunci $v_3 \to u$ (deoarece $d(u, v_\varepsilon) \leqslant \sqrt{\varepsilon}$), iar partea stîngă din (*) converge la $\Phi(u)$, avînd în vedere (2.53).

Cu aceste precizări putem trece la caracterizarea sistemului extremal $\mathcal{S}(., E_{necov})$.

$$(E_{necov}) \begin{cases} f(x) \to min \\ g_i(x) = 0, & i = \overline{1, r} \\ h_j(x) \leqslant 0, & j = \overline{1, k}, \end{cases}$$

unde f, g_i, h_j sînt local Lipschitziene pe R^n.

Teorema de optimalitate. Dacă $x_0 \in R^n$ minimizează funcţia f, atunci există numerele λ, μ_i, v_j nu toate zero, $v_j \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$ astfel încît

$$\lambda \partial f(x_0) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i \partial g_i(x_0) + \sum_{j=1}^{k} v_j\, \partial h_j(x_0) \ni 0.$$

Dacă toate funcţiile sînt diferenţiabile şi continue, relaţia devine $\lambda f'(x_0) + \Sigma\, \mu_i g_i'(x_0) + \Sigma\, v_j h_j'(x_0) = 0$. Dacă în plus sînt satisfăcute şi condiţiile de regularitate ($g_i'(x_0)$ şi $h_j'(x_0)$ pentru $h_j'(x_0) = 0$ sînt liniar independente), atunci $\lambda \neq 0$ şi împărţind prin λ obţinem regula multiplicatorilor lui Lagrange.

Demonstraţie. x_0 minimizează funcţia local lipschitziană (nediferenţiabilă) F dată prin $F(x) = \max\limits_{i,\, j} \{f(x) - f(x_0), |g_i(x)|, h_j(x)\}$. Utilizînd gradientul generalizat a lui F în x_0, avem $0 \in \partial F(x_0)$. Partea dreaptă este convexă în $\partial f(x_0)$, $\partial |g_i(x)|$ şi $\partial h_j(x)$ pentru $h_j(x_0) = 0$. Aceasta înseamnă că există numerele λ, μ_i, v_j astfel încît $\lambda\, \partial f(x_0) + \Sigma\, \mu_i \partial |g_i(x_0)| + \Sigma\, v_j \partial h(x_0) = 0$; $\lambda + \Sigma\, \mu_i + \Sigma\, v_j = 1$. Dacă se explicitează $\partial |g_i(x)|$: $\bigcup\limits_{|t| \leqslant 1} t \partial g_i(x)$, atunci vom avea $\lambda \partial f(x_0) + \Sigma\, \mu_i t_i \partial g_i(x_0) + \Sigma\, v_j \partial h_j(x_0) = 0$; $\lambda + \Sigma\, \mu_i + \Sigma\, v_j = 1$; $-1 \leqslant t_i \leqslant 1$.

Fie $F_\varepsilon(x) = \max\limits_{i,\, j} \{f(x) - f(x_0) + \varepsilon, |g_i(x)|, h_j(x)\}$.

Evident $F_\varepsilon(x_0) - \varepsilon \leqslant \inf\limits_x F_\varepsilon(x) + \varepsilon$. Aplicînd corolarul 2.2 tragem concluzia că $(\exists)\, x_\varepsilon \in R^n$ astfel încît $\| x_0 - x_\varepsilon \| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$ şi x_ε minimizează pe $G_\varepsilon(x) = F_\varepsilon(x) + \sqrt{\varepsilon}\, \| x - x_\varepsilon \|$. Acest lucru implică că

Scanned with OKEN Scanner

$0 \in \partial G_\varepsilon(x_\varepsilon) = \partial F_\varepsilon(x_\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon} B$ (B fiind bila unitate din R^n). Ca şi mai sus, $\partial F_\varepsilon(x)$ se calculează în condiţii de convexitate. Pe de altă parte $F_\varepsilon(x_\varepsilon) > 0$, deoarece x_ε va trebui să satisfacă restricţiile ($f(x_\varepsilon)$ va fi mai mică decît $f(x_0)$, ceea ce este imposibil deoarece x_0 este optimal). Urmează deci să se considere $\partial \mid g_i(x_\varepsilon) \mid$ pentru acei i pentru care $g_i(x_\varepsilon) \neq 0$. Deoarece aplicaţia $t \to \mid t \mid$ este C^1 pe $R \setminus \{0\}$, avem : $\partial \mid g_i(x_\varepsilon) \mid = [\operatorname{sgn} g_i(x_\varepsilon)]\, \partial g_i(x_\varepsilon)$.

În final se obţine : $\lambda_\varepsilon \partial f(x_\varepsilon) + \Sigma\, \mu_{\varepsilon,i}\, [\operatorname{sgn} g_i(x_\varepsilon)]\, \partial g_i(x_\varepsilon) + \Sigma v_{\varepsilon,j}\, \partial h_j(x_\varepsilon) \ni 0$; $\lambda_\varepsilon \geqslant 0$, $\mu_{\varepsilon,i} \geqslant 0$, $v_{\varepsilon,j} \geqslant 0$; $\lambda_\varepsilon + \Sigma \mu_{\varepsilon,i} + \Sigma v_{\varepsilon,j} = 1$.

Dacă $\varepsilon \to 0$, prin compacticitate $(\lambda_\varepsilon, \mu_{\varepsilon,i}, v_{\varepsilon,j})$ are un punct acumulare (λ, μ_i, v_j) în simplexul $(k+r)$ dimensional. Se consideră $u_\varepsilon \in \partial f(x_\varepsilon)$, $v_\varepsilon \in \partial g_i(x_\varepsilon)$ şi $w_\varepsilon \in \partial h_j(x_\varepsilon)$ astfel ca $\lambda_\varepsilon u_\varepsilon + \Sigma \mu_{\varepsilon,i} v_{\varepsilon,i} + \Sigma v_{\varepsilon,j} w_{\varepsilon,j} = 0$. Din proprietăţile gradientului generalizat rezultă că $(u_\varepsilon, v_{\varepsilon,i}, w_{\varepsilon,j})$ are un punct de acumulare (u, v_i, w_i), $u \in \partial f(x_0)$, $v_i \in \partial g_i(x_0)$ şi $w_j \in \partial h_j(x_0)$. Trecînd la limită se obţine $\lambda_\mu + \Sigma(\pm \mu_i) v_i + \Sigma v_j w_j = 0$; $\lambda \geqslant 0$, $\mu_i \geqslant 0$; $v_j \geqslant 0$; $\lambda + \Sigma \mu_i + \Sigma v_j = 1$, care stabileşte rezultatul dorit.

Fie spaţiul Banach V şi funcţia local Lipschitziană $f : V \to R$. Se notează cu $\partial f(u) \subset V^*$ gradientul generalizat a lui f, S o submulţime închisă a lui V ; $N_s(u)$ conul normal a lui S relativ la u şi $d(u, S)$ distanţa de la u la mulţimea S. Cu aceste precizări $N_s(u) = \bigcup_{\lambda \geqslant 0} \lambda \partial d(u, S)$; $u \in S$.

A. Ioffe demonstrează următoarea

Teorema 2.21 Dacă $E \subset S$ este o submulţime închisă definită prin $f(w) = 0$, atunci pentru $(\forall)\, u \in S \setminus E$ şi $(\forall)\, a \in (0, 1]$, $(\exists)\, v \in S$ astfel încît

$$\| v - u \| \leqslant a d(u, E)$$

$$(\exists)\ v_1^* \in \partial \mid f(v) \mid \quad \text{şi} \quad v_2^* \in N_s(v) \quad \text{cu} \quad \| v_1^* + v_2^* \|^* \leqslant$$

$$\leqslant \mid f(u) \mid / a d(u, E).$$

Demonstraţie. Se consideră funcţia $F : V \to R \cup \{+\infty\}$ definită astfel

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in S \\ +\infty, & \text{dacă } x \notin S. \end{cases}$$

F este o funcţie convexă semicontinuă, deoarece f este continuă şi S închisă. Se aplică teorema (2.15) pe V utilizînd norma notată

$|\|w\||=\|w\| / ad(u, E)$ şi $\varepsilon=|f(a)|$. Cu alte cuvinte, se utilizează formula $d(u, v) \leqslant \frac{1}{\lambda}$ şi $(\forall)\, w \neq v$, $F(w) > F(v) - \varepsilon\lambda d(u, w)$, unde $\lambda = ad(u, E)$, $\varepsilon = |f(u)|$, $\|v-u\| \leqslant ad(u, E)$ şi $(\forall)\, w \in V$ avem $F(w) \geqslant F(v) - \|v-w\| \cdot |f(u)| / ad(u, E)$.

Ultima inegalitate implică că $F(v)$ este finit, aşa că $v \in S$ şi $|f(v)| = F(v)$, deci

$$(\forall)\, w \in S, \quad |f(w)| - \|v+w\| \cdot |f(u)| / ad(u, E) \geqslant |f(v)|.$$

Partea stîngă $g(w)$ îşi atinge minimul pe S pentru $w=v$. Aplicînd regula lui Lagrange se obţine $\partial g(v) + N_s(v) \ni 0$, ceea ce înseamnă $\partial |f(v)| + N_s(v) + B^* \frac{|f(u)|}{ad(u, E)} \ni 0$ (B^* fiind bila unitate în V^*).

Corolarul 2.3. Fie g o funcţie C^1 pe R^n. Pentru orice punct u din R^n, notăm prin $E(u) = \{w \mid g(w) = g(u)\}$. Atunci pentru oricare două puncte u_1 şi u_2 există un punct v încît

$$|u_1 - v| \leqslant d(u_1, E[u_2])$$

$$\|g'(v)\| \leqslant \frac{|g(u_1) - g(u_2)|}{d(u_1, E[u_2])}.$$

Demonstraţie. Aplicînd teorema 2.21 pentru $f(u) = g(u) - g(u_2)$ şi $S = R^n$, pentru orice $a \in (0, 1]$ găsim v_a cu proprietatea

$$\|u_1 - v_a\| \leqslant ad(u_1, E[u_2])$$

$$\exists\, v_a^* \in \partial |f(v_a)|; \quad \|v_a^*\| \leqslant \frac{|g(u_1) - g(u_2)|}{ad(u_1, E[u_2])}.$$

Dacă $a < 1$, prima ecuaţie implică că $v_a \notin E[u_2]$, aşa că $f(v_a) \neq 0$ şi $\partial |f(v_a)| = \pm f'(v_a) = \pm g'(v_a)$ cînd $a \to 1$. Şirul v_a are un punct de acumulare $v \in R^n$ din cauza bilei cu raza $d(u_1, E[u_2])$ centrată în u_1 şi $g'(v_a)$ are $g'(v)$ ca punct de acumulare căci g' este continuă.

Corolarul 2.4. Fie E o submulţime închisă a lui S definită prin ecuaţia $f(w) = 0$ şi $w \in E$. Presupunem că există $\varepsilon > 0$ şi $c > 0$ încît pentru orice $v \in S \setminus E$, cu $\|v - w\| \leqslant \varepsilon$

$$v_1^* \in \partial |f(v)| \quad \text{şi} \quad v_2^* \in N_s(v) \Rightarrow \|v_1^* + v_2^*\|^* \geqslant \varepsilon.$$

Atunci, pentru orice $u \in S$ cu $\|u - w\| < \varepsilon/2$

$$d(u, E) \leqslant f(u)/c.$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Teorema 2.21 dă pentru orice $a \in (0, 1)$ punctul $v_a \in S$ (care nu este în E deoarece $\| v_a - u \| < d(u, E)$), astfel că

$$\| v_a - w \| \leqslant \| v_a - u \| + \| u - w \| \leqslant ad(u, E) + \| u - w \| \leqslant$$
$$\leqslant (a+1) \| u - w \| \leqslant (a+1)\varepsilon/2 \leqslant \varepsilon$$

și $v_1^* \in \partial \mid f(v_a) \mid$ și $v_2^* \in N_\varepsilon(v_a)$ încît

$$d(u, E) \leqslant \mid f(u) \mid / a \| v_1^* + v_2^* \| ^*.$$

Partea dreaptă este mai mică decît $f(u)/ac$. Luînd $a \to 1$, obținem rezultatul dorit.

Corolarul 2.4 are aplicații importante în teoria optimizătii.

Observația 2.22. Orice funcție continuă $F(x_j)$ definită pe un domeniu mărginit poate fi aproximată cu orice precizie printr-o funcție de forma $\min f(x_j)$, unde toate funcțiile $f(x_j)$ sînt convexe (concave). Cu alte cuvinte, $F(x_j)$ poate fi aproximata prin minimul unei familii finite de funcții convexe (concave).

2.1.5. SISTEME EXTREMALE STOCHASTICE

Considerăm sistemul extremal

$$(Es) \begin{cases} f(x, z) \to opt \\ f_j(x, z) \{\geqslant, =, \leqslant\} 0, \quad j = 1, \overline{m}, \end{cases}$$

în care x și z sînt vectori din spațiile enclidiene D^n și E^m. Vectorul z este aleator, avînd distribuția $F_z(y)$. În cele ce urmează mai considerăm D^n și E^m măsurabile Lesbegue, iar $f(x, z)$ măsurabilă și mărginită. Notăm prin $P(A)$ măsura de probabilitate $A \subset \mathcal{A}$, unde $\mathcal{A}$ este dată pe o σ-algebră $\mathcal{S}$ de mulțimi boreliene astfel ca $P(\mathcal{A}) = 1$ $P(\emptyset) = 0$, iar $Mf(x, z) = \int_{E^m} f(x, y) P(dy)$ speranța matematică a funcției de performanță a sistemului Es.

Definiția 2.14. Se numește sistem extremal stochastic modelul matematic

$$\begin{cases} f^0(x) = Mf(x, z) \to \min \\ x \in D^n \end{cases}$$

fizic realizabil.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 2.15. Punînd $z=z_0$, vom spune că $f(x)$ are în x_0 un minim absolut dacă și numai dacă $f(x_0)\leqslant f(x)$ pentru orice $x\in D^n$.

Definiția 2.16. Vom spune că avem un minim local dacă $\forall\,\varepsilon>0$, $f(x_0)<f(x)$ pentru orice $x\in V_\varepsilon(x_0)$, unde $V_\varepsilon(x_0)$ este o vecinătate a punctului x_0.

Definiția 2.17. Spunem că două minime locale x_0 și x_0' sînt echivalente dacă $f(x_0)=f(x_0')$.

Definiția 2.18. Se numește sistem multiextremal, sistemul care are minime locale neechivalente.

Fie $z_1\in E^m$ și x_1 valoarea corespunzătoare minimului funcției $f(x, z_1)$, iar x_0 valoarea corespunzătoare minimului lui $f(x, z_0)$. Cu aceste precizări putem da următoarea definiție.

Definiția 2.19. Se numește funcție de pierdere de prim ordin, funcția

$$l_1(z_1, z_0)=f(x_0, z_0)-f(x_1, z_1).$$

Observația 2.23. Pot fi introduse ușor funcții de pierdere și de alte ordine [128].

Este necesar ca în formularea unor sisteme extremale stochastice să cunoaștem distribuția lui z. Acest lucru se poate face fie din considerente tehnice, fie cu ajutorul unor metode statistice. Plecînd acuma de la acest fapt, putem cerceta în urma unor observații funcția de distribuție $F_Z(y)=P(A_y)$, unde $A_y=\{x\in D^n \mid f(x)\leqslant y\}$

Definiția 2.20. Se numește observație, valoarea funcției de performanță $f(x)$ cu condiția

$$F_X(y)=\prod_{i=1}^{n} F_{x_i}(y_i),$$

unde $F_X(y)$ este funcția de distribuție a lui $x\in D^n$.

Notăm prin Z_i rezultatul celei de-a i-a observație.

Dacă din l observații, k valori ale funcției de performanță sînt mai mici sau egale cu y, atunci obținem funcția empirică $F_l(y)=\frac{k}{l}$. Conform însă teoremei centrale avem:

$$\lim_{l\to\infty} P\left(\sup_{-\infty<y<\infty} |F_l(y)-F_Z(y)| \to 0\right)=1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Observația 2.24. Funcția $F_Z(y)$ poate fi reprezentată pe baza unui număr mare de observații. Pe de altă parte, în funcție de natura sistemului analizat legea $F_Z(y)$ se poate aproxima cu legi de distribuție cunoscute (normală etc.) cu condiția ca numărul observațiilor să fie mare. În acest scop se aplică diferite criterii

Exemplu : (Criteriul χ^2)

Vom verifica ipoteza H_0 cu privire la rezultatul observării a m valori ale variabilei aleatoare Z, avînd distribuția $F_{Z_0}(y)$. Pentru aceasta, fie $\mathcal{Z}$ spațiul tuturor valorilor posibile ale lui Z. Vom împărți acest spațiu într-un număr finit de părți $A_i=\overline{1, l}$. Notăm prin m_i numărul alegerilor lui y și introducem vectorul $h_i=\frac{m_i}{m}$, $h=(h_1, h_2, \ldots, h_l)$. Cu aceste precizări, problema constă în verificarea liniarității ipotezei H_0 $(h^*=Mh-p=0)$ prin alternativa $Mh-p\neq 0$ (de nemărginire), unde p este vectorul valorii medii $p=(p_1, \ldots p_l)$, $p_i=P(A_i)$.

Observația 2.25. Funcția $P(A_i)$ pentru $F_{Z_0}(y)$ poate fi calculată pentru fiecare A_i.

Vom spune că χ^2 răspunde la ipoteza H_0 dacă $\chi^2>c$, unde $\chi^2=m\sum_{i=1}^{l}\frac{(h_i-p_i)^2}{h_i}$ și $c=\int_c^{\infty} f(y)\,dy=\alpha_0$, α_0 reprezentînd probabilitatea ca H_0 să fie verificată cînd $m\to\infty$.

În practică $\alpha_0=0{,}05$; $0{,}01$ și $0{,}005$.

Cînd H_0 este verificată, avem pentru

$$f(y)=\frac{1}{2^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}y^{\frac{s}{2}-1}\cdot e^{-\frac{y}{2}};\quad y\geqslant 0,\quad \text{unde}\quad s=l-r-1,$$

iar r reprezintă numărul parametrilor necunoscuți pentru $F_Z(y)$ în ipoteza că evaluarea acestor parametrii este făcută prin grupări de date cu efecte asimptotice. Notînd cu

$$\Delta^2=\sum_{i=1}^{l}\frac{(r_i-p_i)^2}{h_i},\quad A_i=\{y \mid a_i<y\leqslant b_i\},$$

avem

$$r_i=F_Z(b_i)-F_Z(a_i)\quad \text{și}\quad p_i=F_{Z_0}(b_i)-F_{Z_0}(a_i).$$

Cu aceste precizări, în [128] se dă următoarea teoremă.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 2.22. Dacă $\Delta^2>0$, atunci pentru $m\to\infty$, $P(\chi^2>c)=1$ pentru $\forall c<\infty$.

Demonstrație. Din teorema numerelor mari, pentru $m\to\infty$ rezultă în acest caz $P(\delta_i\to 0)=1$, unde $\delta_i=h_i-p_i$. Notăm prin $\delta=\frac{\chi^2}{m}-\Delta^2$. Deoarece $h_i>0$ și $|\delta_i|\leqslant 1$ din relațiile de mai sus pentru l fixat rezultă $P(\delta\to 0)=1$ și $P(\chi^2>c)=P\left(\Delta^2-\delta>\frac{c}{m}\right)=$ $=P\left(\delta<\Delta^2-\frac{c}{m}\right)$. Deoarece $\Delta^2-\frac{c}{m}>0$ pentru $m\to\infty$ rezultă concluzia teoremei.

Observația 2.26. Dacă condițiile teoremei 2.22 sînt îndeplinite, atunci după criteriul χ^2 (pentru $m\to\infty$) ipoteza H_0 este verificată cu probabilitatea 1.

În cazul neliniarității, considerăm ipoteza H_Δ, unde funcția de distribuție face parte dintr-o familie de distribuții care diferă de $F_{Z_0}(y)$ printr-un $\Delta<\Delta_0$ sau $\Delta>\Delta_0$, unde Δ_0 este cunoscut. Ipoteza H_Δ este verificată cînd $\chi^2>c_\lambda$, unde c_λ se determină din ecuația

$$\int_{c_\lambda}^{\infty} f_\lambda(y)\,dy=\alpha_\lambda, \tag{2.55}$$

α_λ fiind un număr fixat ($\alpha_\lambda>0$), iar $f_\lambda(y)$ reprezentînd densitatea distribuției necentrale χ^2 cu parametru necentral $\lambda=m\Delta_0^2$.

Pentru determinarea lui $f_\lambda(y)$ se poate consulta [128]. În [128] se arăta de asemenea că ecuația 2.55 este echivalentă cu $\alpha<\alpha_\lambda$, unde $\alpha=\int_{\chi^2}^{\infty} f_\lambda(y)\,dy$.

Pentru $m\to\infty$, în [128] se demonstrează următoarea implicație

$$P(\alpha<\alpha_\lambda)=\begin{cases}1, & \text{dacă } \Delta>\Delta_0.\\ 0, & \text{dacă } \Delta<\Delta_0.\end{cases}$$

O problemă foarte importantă pe care o punem în continuare se referă la caracterizarea minimului funcției de performanță f pe o mulțime dată $A\subset D^n$. Dacă în A vom face l observații și presupunem $Z_{0,l}$ cea mai mică valoare a speranței matematice

$$M(l)=MZ_{0,l}=\int_{-\infty}^{\infty} y\,dZ_{0,l}(y),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

(2.56) $Z_{0,l}=min\ \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_l\}$; $F_{Z_{0,l}}(y)=1-(1-F_Z(y))$,

atunci are loc

Teorema 2.23. (Criteriul de optimalitate). Dacă pe mulțimea mărginită $\mathcal{Z}$ considerăm funcția de distribuție $F_Z(y)$ care are proprietățile

$$
(2.57) \qquad \begin{aligned} F_Z(y)&>0, \quad \text{dacă } y>a \\ F_Z(y)&\geqslant 0, \quad \text{dacă } y=a \\ F_Z(y)&=0, \quad \text{dacă } y<a, \end{aligned}
$$

atunci $M(l)$ pentru $l \to \infty$ are următoarea proprietate

$$M(\infty)=\lim_{l\to\infty} M(l)=a.$$

Demonstrație. Pe baza lui (2.56) și (2.57), pentru fiecare $y \in \mathcal{Z}$ putem scrie : $\lim\limits_{l\to\infty} |F_{Z_{0,l}}(y)-F_{Z_{0,\infty}}(y)|=0$, unde

$$F_{Z_{0,\infty}}(y)=\begin{cases} 0, \text{ dacă } y<a \\ 1, \text{ dacă } y>a. \end{cases}$$

Conform teoremei lui Hely, Natanson (*Teoria funcțiilor de variabilă reală*), avem

$$M(\infty)=\lim_{l\to\infty} M(l)=\lim_{l\to\infty}\int_{\mathcal{Z}} y\, dF(y)=\int_{\mathcal{Z}} y\, dF_{Z_{0,\infty}}(y)=a$$

și teorema este demonstrată.

Observația 2.27 (determinarea funcției $F_{Z_{0,l}}(y)$). Deoarece am presupus că $F_Z(y)$ este diferențiabilă, vom avea ținînd cont de (2.56)

$$f_{Z_{0,l}}(y)=l\,(1-F_Z(y))^{l-1} f_Z(y),$$

unde $f_Z(y)$ a fost precizată la începutul acestui paragraf. Uneori $f_{Z_{0,l}}(y)$ poate fi calculată cu ajutorul mărimii auxiliare $\Xi=lF_Z(Z_{0,l})$

a cărei densitate, așa cum se arată în [128], este dată de expresia

$$f_{\Xi}(\xi)=\left(1-\frac{\xi}{l}\right)^{l-1},$$

iar pentru $l \to \infty$

$$\lim_{l\to\infty} f_{\Xi}(\xi)=e^{-\xi}.$$

O altă probabilitate constă în introducerea funcțiilor de pierdere de ordinul trei. În acest caz, în [128] se arată că $M(l)$ coincide cu această funcție.

Pentru alte moduri de tratare, precum pentru detalii trimitem cititorul interesat la bibliografia anexată.

2.1.6. SIMULAREA SISTEMELOR EXTREMALE

Un model este înlocuitorul unui sistem și în funcție de scopuri poate fi :

a) model fizic,

b) model matematic,

c) modele procedurale.

Toți sîntem familiarizați cu modele fizice.

Modele mai abstracte, nu sînt însă comune.

Am văzut că orice set de relații care descriu un obiect fizic constituie un model al acestuia și anume modelul său matematic.

Putem spune deci, că orice model matematic este o reprezentare a esențialului unui sistem dacă este respectată următoarea regulă generală :

a) Dacă modelul matematic furnizează o descriere acceptabilă a realității, atunci el trebuie utilizat.

b) Dacă un astfel de model se arată nerealist, atunci trebuie construit un model de simulare.

În a treia categorie de modele (procedurale) intră cele care nu pot fi definite analitic din cauza complexităților.

Pentru astfel de modele, pentru a determina o configurație de sistem se folosesc metodele de simulare. Modelele reprezintă realitatea, simularea le imită.

Scanned with OKEN Scanner

În acest paragraf ne folosim doar de modelul fizic și cel matematic ; pentru modelele procedurale se poate consulta [32] și bibliografia corespunzătoare.

Deoarece modelul situației reale poate fi un analog concret (model fizic) sau un model abstract, vom trata următoarele tipuri de simulare :

a) Simulare numerică.

b) Simularea analogică.

2.1.6.1. SIMULAREA NUMERICĂ

Definiția 2.21. Simularea este o tehnică numerică de realizare a experiențelor cu calculatorul digital, care implică utilizarea unor modele matematice care descriu comportarea unui sistem real.

Din definiție rezultă clar că : simularea presupune întotdeauna utilizarea modelului, necesitînd un mare volum de calcule și de aceea, pînă la apariția calculatoarelor, adeseori era imposibil de realizat în practică.

Natura sistemelor ne conduce în mod natural la următoarea clasificare :

		Natura sistemului	
		Deterministică	Stochastică
Model	Analitic	Sisteme extremale liniare, neliniare	Sisteme extremale stochastice
	Analogic și aleatoric	Metode Monte-Carlo	Simulare

Scanned with OKEN Scanner

Ne concentrăm atenţia în continuare asupra simulării pe modele extremale. Problema constă în evaluarea unor expresii care conţin una sau mai multe variabile aleatoare. Pentru fixarea ideilor, considerăm sistemul fizic realizabil descris de următorul model matematic

$$\mathcal{S}\begin{cases} f(x, z) \to opt \\ f_j(x, z) \ \{\geqslant, =, \leqslant\} \ 0, \quad j=\overline{1, m}, \end{cases}$$

unde variabila aleatoare z are legea de repartiţie F. Esenţa metode simulării constă în atribuirea variabilei aleatoare z a unor valori alese la întîmplare dintr-o populaţie, avînd repartiţia F. Pentru aceasta sînt necesare :

a) o mulţime de numere aleatoare ;

b) un procedeu de transformare a acestor numere într-o altă ; mulţime de numere aleatoare, a căror funcţie de repatiţie să fie F ;

c) o metodă de estimaţie.

În consecinţă, au fost elaborate o serie de programe pentru a genera numere, numite pseudoaleatoare [123, 182] (Biblioteca statistică a calculatorului Felix-256).

Observaţia 2.28. În cazul în care F nu se încadrează într-unul din tipurile cunoscute, vom determina funcţia de repartiţie empirică, care va lua locul lui F.

Observaţia 2.29. Din cauza volumului mare de calcule necesitate se utilizează metode de estimaţie care ne permit reducerea numărului de observaţii, pentru acelaşi grad de precizie. Aceste procedee poartă numele de procedee de micşorare a dispersiei [97].

Observaţia 2.30. De cele mai mlte ori nu putem cunoaşte în prealabil numărul necesar de observaţii, de aceea se procedeză la o selecţie în mai multe etape.

Observaţia 2.31. Spre deosebire de simulare, metoda Monte-Carlo se referă la utilizarea selecţiilor pentru estimarea valorilor unor variabile nealeatoare.

Soluţia optimă a sistemlui $\mathcal{S}$ se poate obţine cu ajutorul simulării în modul următor :

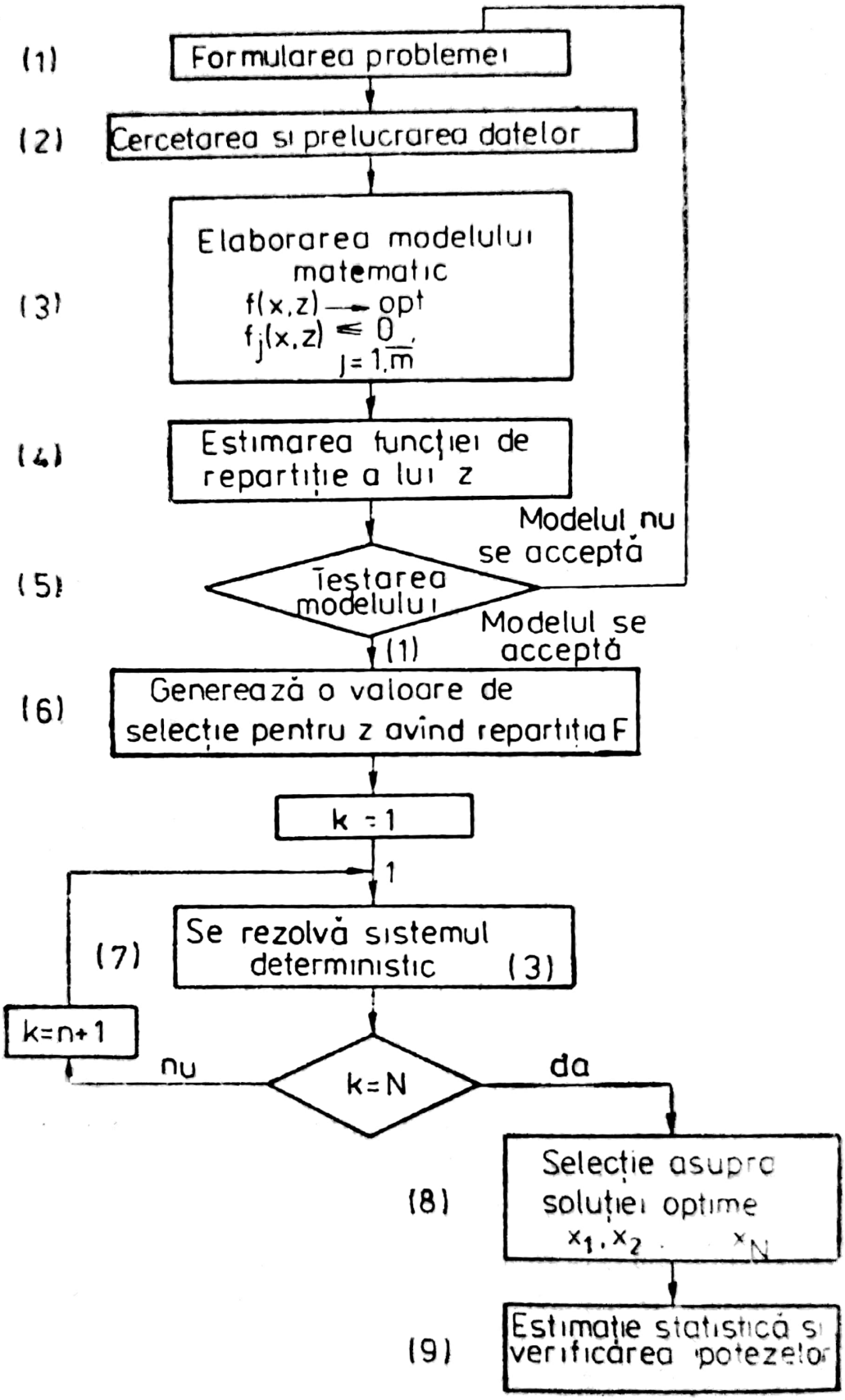


Fig. 2.12.

Scanned with OKEN Scanner

Observaţia 2.32. Problema care ne interesează în final este de a găsi legea de probabilitate sau caracteristicile care ne interesează ale variabilei *opt f*, folosind eşantionul $x_1, x_2, \ldots, x$.

Astfel, situaţia experimentală va servi drept o realitate artificială fiind folosită pentru a genera o istorie, istorie care se naşte testînd sistematic pe realitatea artificială ipotezele făcute cu privire la sistemul real.

Observaţia 2.33. Simularea mai poate fi folosită la :

1. Studiul proceselor de tranziţie.
2. Estimarea valorilor parametrilor şi studiul formei funcţionale a modelului.
3. Estimarea posibilităţilor de acţiune care nu pot fi formulate în model.

Cîteva reguli generale prin care putem defini durata simulării în cazul în care deţinem informaţii sumare despre sistemul pe care-l simulăm pe un calculator digital se află în următoarele monografii : I. Văduva, *Modele de simulare cu calculatorul* şi J. Agard, J. Altaber, R. Fortet, A. Kaufmann, P. le Gall, J. Precigout, J. Stengel, C. Thomas, *Les methodes de simulation.*

Observaţia 2.34. Pentru blocul (7) se pot utiliza subprogramele SIMPLEXE, POSTOPT catalogate în biblioteca PROGLIN sub forma IMT pentru sisteme liniare, iar pentru sisteme neliniare se pot consulta lucrările [111, 40].

2.1.6.2. SIMULAREA ANALOGICĂ

Scopul acestui paragraf este de a arăta că oricărui sistem extremal $\mathcal{S}$ (*ob. orientat*, E)

$$(E)\begin{cases} f(x) \to min \\ g(x) > 0 \\ x > 0, \end{cases}$$

unde x este un vector de ordinul n, iar g de ordinul m, i se poate ataşa o reţea analoagă. Nu vom face aici o discuţie detaliată, nefiind scopul lucrării, ci pur şi simplu enunţăm rezultatele fundamentale şi consecinţele lor, urmînd ca cei interesaţi să consulte lucrările [185, 43, 174].

Sistemul $\mathcal{S}$ (*ob. orientat*, E) poate fi simulat prin următoarea reţea analoagă (R), (fig. 2.13).

Scanned with OKEN Scanner

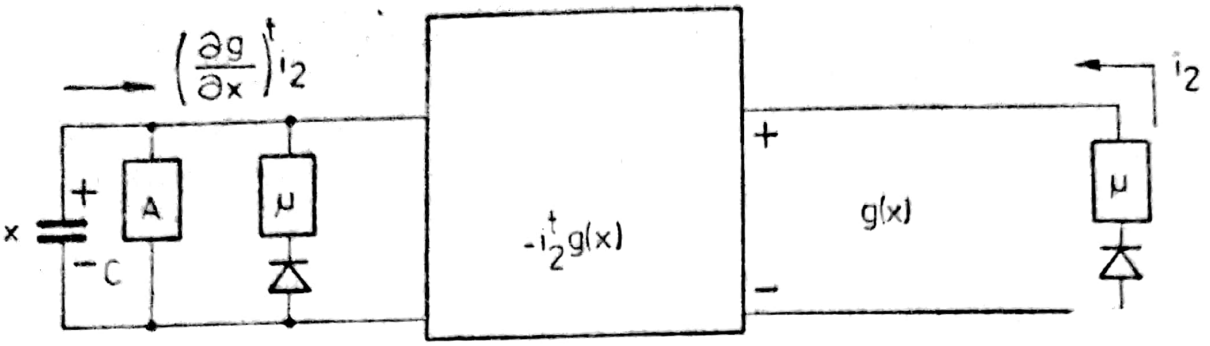


Fig. 2.13.

Într-adevăr, funcția f este simulată prin elementul A, element definit prin funcția cumulativă reciprocă $\mathcal{F}=f$. Prin funcția hibridă de disipație definim elementul $i_2^t\, g(x)$, iar diodele le vom folosi pentru modelarea restricțiilor $g(x)>0$, $x>0$.

Teorema 2.24. Orice punct singular al rețelei (R) tinde către soluția unică x_0 a sistemului $\mathcal{S}$ (*ob. orientat*, E) cînd $\mu\to 0$, dacă sînt satisfăcute următoarele condiții

a) f este convexă, continuă și de două ori derivabilă.

b) Fiecare componentă a lui g este concavă și de două ori derivabilă.

c) Există x_0 un punct de minim a lui f în mulțimea $\Delta=\{x \mid g(x)>0,\ x>0\}$.

Vom da demonstrația după [185].

Funcția $\mathcal{F}'_N$ are următoarele proprietăți :

1) $\mathcal{F}'_N(x)=f(x)$, dacă $x\in\Delta$.

2) $\mathcal{F}'_N(x)>f(x)$, dacă $x\notin\Delta$.

3) $\mathcal{F}'_N$ este convexă.

Cu aceste precizări, vom considera următoarele cazuri posibile : 1) $x_0\in\Delta$, 2) $x_0\in F_r\,\Delta$.

În primul caz demonstrația este banală, deoarece x_0 poate fi numit punct staționar, avînd în vedere 1—3.

Pentru cazul 2 alegem un $\varepsilon>0$ și definim mulțimea $A=\{x : \|x-x_0\|=\varepsilon\}$. Deoarece A este compactă, f are o margine inferioară m, în $x_m\in A$. De asemenea există un $\alpha>0$ astfel ca $f(x)\geqslant\alpha+f(x_0)$ pentru $x\in A\cap\Delta$. Fiind dat acum un $\eta>0$, putem defini mulțimea

$B=\{x : \| x-\tilde{x} \| < \eta\}$ pentru toți $\tilde{x} \in \Delta$. Avînd în vedere continuitatea, rezultă $f(x) > f(x_0) + \frac{\alpha}{2}$ pentru $x \in A \cap \Delta$. În felul acesta $\mathcal{F}'_N(x) > f(x_0) + \frac{\alpha}{2}$ pentru $x \in A \cap B$. Fie $E \overset{\text{def}}{=} A \cap C\ B$ și $F(x) \overset{\text{def}}{=} \min\limits_{i,j} [x_i, f_j(x)]$.

Deoarece E este compactă, F are o margine superioară M în E. Dacă vom alege un $\mu_0 > 0$ în modul următor $\frac{M^2}{2\mu_0} \geqslant \left[f(x_0) - f(x_m) + \frac{\alpha}{2} \right]$, atunci din definiția lui $\mathcal{F}'_N$ rezultă că: $\mathcal{F}'_N(x) \geqslant f(x_0) + \frac{\alpha}{2}$ pentru $0 \leqslant \mu \leqslant \mu$ si $x \in A$. Datorită convexității lui $\mathcal{F}'_N$ rezultă că $\| x_N - x_0 \| < \varepsilon$, q.e.d.

Observația 2.35. Ecuațiile diferențiale ale rețelei sînt

$$C \frac{dx}{dt} = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}'_N}{\partial x} \right)^t.$$

Capacitățile C au fost incluse în scopul analizei stabilității, sistemului modelat.

Teorema 2.25. Soluțiile sistemului $C \frac{dx}{dt} = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}'_N}{\partial x} \right)^t$ tind către un punct singular cînd $t \to \infty$ dacă avem satisfăcute a), b) și c) din teorema 2.24.

Justificarea se face utilizînd funcția $\mathcal{F}'_N$ ca o funcție Liapunov [110].

Observația 2.36. Teoremele enunțate implică faptul că rețeaua analoagă modelează sistemul $\mathcal{S}$ (*ob. oriental*, E) și deci se comporta așa cum s-a afirmat la începutul paragrafului.

În încheiere vom da rețeaua analoagă pentru metoda gradientului fig. 2.14.

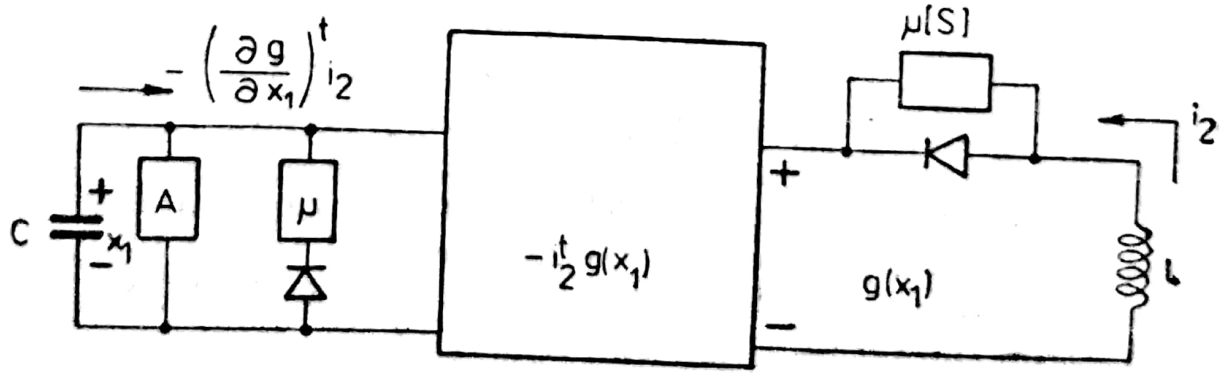


Fig. 2.14.

Observația 2.37. Considerînd elementele de înmagazinare a energiei reactive, se constată că rețeaua din fig. 2.14 simulează rezolvarea problemei punctului șa.

Utilizarea rețelelor depinde în mare măsură de sistemul extremal. Prin aceste rețele se reușește o înțelegere mai bună a fenomenului fizic pe de o parte, iar pe de altă parte rețeaua analoagă constituie un model direct ce poate fi utilizat pentru determinarea parametrilor optimi ai sistemelor extremale.

2.2. SISTEME EXTREMALE POLICRITERIALE

În acest paragraf se consideră sistemele extremale unde $f(x(t), z(t))$ este un vector cu n componente, componente ce reprezintă criterii după care se face analiza sistemului extremal. Astfel, apare problema determinării $(x(t), z(t)) \in \Delta$ care să fie „cît mai bun" din punct de vedere al ansamblului criteriilor.

Definiția 2.22. Numim sistem extremal policriterial și notăm prin $\mathcal{S}$ (*ob. orientat*, $\tilde{E}$) modelul matematic

$$\tilde{E}\begin{cases} f(F_1(x(t), z(t)), \ldots, F_n(x(t), z(t)) \to opt \\ fj(x(t), z(t)) \quad \{\geqslant, =, \leqslant\} \ 0, \quad j=\overline{1, m} \end{cases}$$

fizic realizabil.

Definiția 2.23. Numim sistem extremal policriterial staționar (fără perturbații), sistemul extremal descris de următorul model:

$$\tilde{E}_s\begin{cases} f(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x) \to opt \\ f_j(x) \quad \{\geqslant, =, \leqslant\} \ 0, \quad j=\overline{1, m}. \end{cases}$$

Definiția 2.24. Pentru modelul extremal se zice că $x^0 \in \Delta$ este soluție eficientă (soluție care realizează cel mai bun compromis), dacă nu există nici o soluție (admisibilă) $x \in \Delta$ astfel încît să fie satisfăcute condițiile:

a) $F_i(x) \geqslant F_i(x^0)$ pentru $i=\overline{1, n}$

Scanned with OKEN Scanner

b) Pentru cel puţin un i_0 să avem

$$F_{i_0}(x) > F_{i_0}(x^0)$$

$$f(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x) \mid \to max$$

$$f_j(x) \ \{\geqslant, =, \leqslant\} \ 0, \quad j=\overline{1, m}.$$

Definiţia 2.25. Pentru modelul extremal se zice că soluţia admisibilă $x^0 \in \Delta$ este eficientă dacă nu există nici o soluţie admisibilă ($x \in \Delta$) astfel încît să fie satisfăcute următoarele condiţii:

a) $F_i(x) \leqslant F_i(x_0)$ pentru $i=\overline{1, n}$.

b) Pentru cel puţin un i_0 să avem

$$F_{i_0} < F_i(x^0)$$

$$f(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)) \to min$$

$$f_j(x) \ \{\geqslant, =, \leqslant\} \ 0, \quad j=\overline{1, m}.$$

Observaţia 2.38. Aşa cum rezultă din literatura [26, 34, 98, 105, 116, 117, 118, 137, 138, 173], determinarea punctelor eficiente constituie elementul esenţial în metodele de rezolvare a sistemelor extremale policriteriale.

Sistemele extremale liniare constituie un instrument eficient care a început să fie pus la punct în ultimii 10—15 ani. Este natural deci să încercăm să folosim acest instrument la rezolvarea sistemelor extremale policriteriale.

Pentru fixarea ideilor considerăm sistemul $\tilde{E}_s$ în care x este un scalar. În cazul în care $F_i(x)$, $f_j(x)$ sînt convexe, metoda pe care o analizăm dă întotdeauna o interpolare acceptabilă.

Considerăm reţeaua $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Înfăşurătoarea convexă a acestei mulţimi are elemente de forma

$$x = \sum_i \lambda_i x_i; \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1.$$

Cu aceste precizări, liniarizarea, de exemplu, a lui $F_1(x)$ va fi:

$$F_1(x) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i F_1(x_i).$$

În felul acesta se va obţine un sistem extremal policriterial liniar, în variabilele $\lambda_i^{(j)}$.

Scanned with OKEN Scanner

Observaţia 2.39. Pentru obţinerea unei aproximări precise a funcţiilor din modelul sistemului extremal sînt necesare multe puncte reţea. În această situaţie se poate obţine o economie de calcule dacă operăm în vecinătatea optimului. Acest lucru se poate realiza lăsînd metodei POP sau STEM [173] de a alege noi puncte reţea prin intermediul subproblemelor.

Deoarece aparatul sistemelor extremale monocriteriale a fost dezvoltat, vom enumera în continuare cazurile în care un sistem extremal policriterial poate fi rezolvat cu ajutorul acestora.

I. Dacă criteriile sînt comparabile, atunci putem obţine un criteriu sinteză [173].

II. În cazul în care criteriile nu sînt comparabile, le înlocuim cu funcţii utilitate în sens von Neumann-Margenstern pentru a putea obţine criteriul sinteză [22, 23, 137].

III. Ordonarea criteriilor [173].

Observaţia 2.40. Diferitele relaţii între metodele de rezolvare a sistemelor extremale policriteriale se pot găsi în următoarele lucrări [49, 50, 68, 69].

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III

SISTEME EXTREMALE DIN BARE

3.1. GENERALITĂŢI

Modelul CR poate fi extins printr-o teorie geometrică sau statică, legătura dintre aceste teorii evidenţiind modul în care un corp se opune la solicitare. Acest lucru a fost pus în evidenţă în 1 660 de R. Hooke şi, independent de el, de E. Mariotte care a dat dealtfel şi primele aplicaţii. Deşi legea Hooke-Mariotte pare simplă şi evidentă ea constituie totuşi baza modelelor deformabile. Se va evidenţia în continuare faptul că relaţia dintre variabilele geometrice şi mecanice poate fi neliniară din următoarele considerente :

a) materialul nu se comportă după legea lui Hooke-Mariotte (neliniaritatea materială),

b) legea lui Hooke-Mariotte este respectată, dar deplasările schimbă în mare măsură modul de acţiune al forţelor (neliniaritatea geometrică). Aceste supoziţii atestă faptul că teoria neliniară nu este simplu rezultat al unei dorinţe de generalizare, ci în anumite cazuri (solicitări, materiale etc.) presupunerile asupra liniarităţii nu mai reprezintă nici măcar o primă aproximaţie a fenomenului.

Scanned with OKEN Scanner

3.2. SISTEME EXTREMALE CU MODEL ELASTIC

Problema optimizării stării tensionale a sistemelor de bare constituie obiectul preocupării multor autori [12, 35, 56, 90, 153, 158, 162]. În aceste lucrări, fundamentul este acelaşi — optimizarea stării sistemului cu o interpretare diferită.

Pentru precizarea ideilor acestui paragraf, se consideră sistemul arbitrar de bare $\mathcal{S}$ căruia i se ataşează expresia lucrului mecanic efectuat de forţele exterioare L

$$L = Ep + \tilde{E}, \tag{3.1.}$$

unde Ep reprezintă energia potenţială de deformaţie, iar $\tilde{E}$ energia suplimentară (disipată). Energia potenţială putînd fi exprimată prin

$$Ep = \langle AS,\ S \rangle, \tag{3.2.}$$

pe cînd energia suplimentară $\tilde{E}$ se poate explicita numai în anumite cazuri particulare. A este matricea deplasărilor din cauza unitate, S vectorul solicitărilor.

Pentru cazul fermelor (la care starea tensională se precizează printr-un singur parametru, efortul axial), este posibilă scrierea analitică a energiei suplimentare [71, 130].

Dependenţa dintre deformaţii şi tensiuni se poate exprima astfel

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma\,[1 + \varphi(\sigma)], \tag{3.3}$$

$$\sigma = E\,\varepsilon\,[1 - \omega(\varepsilon)], \tag{3.4.}$$

unde funcţiile φ şi ω reflectă abaterile de la legea lui Hooke. În baza reprezentării din fig. 3.1 se obţin imaginile acestori abateri.

$$\omega = CA/CB\,; \quad \varphi = AD/AG. \tag{3.5}$$

Cu aceste precizări, lucrul mecanic consumat de elementul k de secţiune A_k şi lungime l_k se scrie

$$L_k = l_k A_k z\,(\sigma_k \varepsilon_k + \int_0^{l_k} \sigma d\varepsilon). \tag{3.6.}$$

Scanned with OKEN Scanner

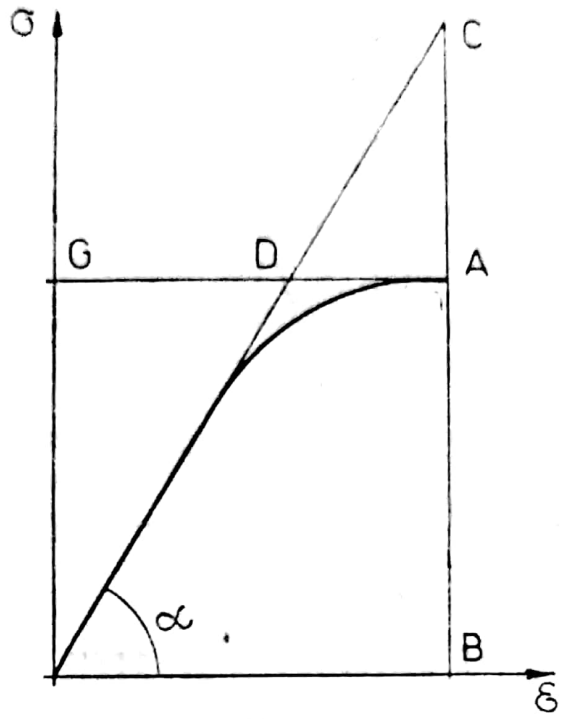


Fig. 3.1.

Din (3.3) rezultă

$$d\varepsilon = \frac{1}{E}\,[d\sigma + \varphi(\sigma)d\sigma + \sigma\varphi'(\sigma)\,d\sigma], \tag{3.7.}$$

$$\sigma_k = S_k / A_k. \tag{3.8.}$$

Înlocuind pe (3.7), (3.8) în (3.6) se obține

$$L_k = \frac{S_k^2\, l_k}{EA_k} + \frac{l_k S_k}{E}\int_0^{\sigma_k} [\sigma\varphi(\sigma) + \sigma^2\varphi'(\sigma) + \sigma]\, d\sigma. \tag{3.9}$$

Pentru elementul k rezultă expresia energiei suplimentare

$$\tilde{E}_k = \frac{l_k S_k}{E}\int_0^{\sigma_k} [\sigma\varphi(\sigma) + \sigma^2\varphi'(\sigma)]\, d\sigma + \frac{S_k^2 l_k}{EA_k}\,\varphi\left(\frac{S_k}{A_k}\right). \tag{3.10}$$

Observația 3.1. Funcțiile următoare

$$\psi(\sigma_k) = \int_0^{\sigma_k} [\sigma\varphi(\sigma) + \sigma^2\varphi'(\sigma)]\, d\sigma + \left(\frac{S_k}{A_k}\right)^2 \varphi\left(\frac{S_k}{A_k}\right) \tag{3.11}$$

$$\psi_k'(\sigma_k) = \left(\frac{S_k}{A_k}\right)\varphi\left(\frac{S_k}{A_k}\right) \tag{3.12}$$

constituie o măsură a energiei suplimentare și se determină funcție de proprietățile materialului [163].

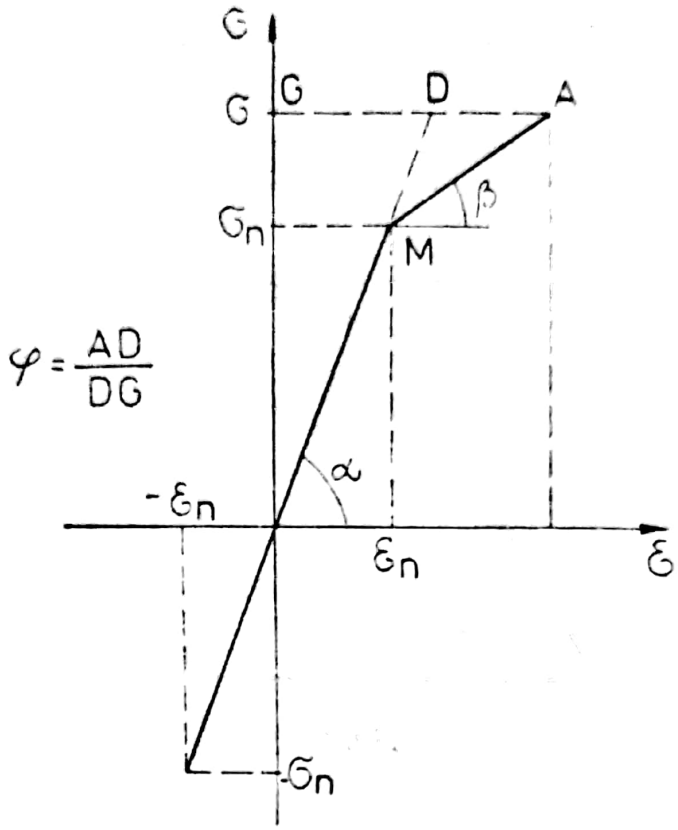


Fig. 3.2.

Pentru formularea Ramberg-Osgood a expresiei (3.3)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\left[1+\alpha\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{p-1}\right], \tag{3.13}$$

relațiile (3.11), (3.12) se explicitează.

Pentru un material cu ecruisare liniară de modul de elasticitate E_0 se obțin imaginile grafice și analitice ale notației φ, fig. 3.2.

$$\varphi = \begin{cases} 0 & ; \quad |\sigma| \leqslant \sigma_n \\ \dfrac{E-E_0}{E_0}\left(1-\dfrac{\sigma_n}{|\sigma|}\right) & ; \quad |\sigma| > \sigma_n, \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\varphi' = \begin{cases} 0 & ; \quad |\sigma| \leqslant \sigma_n \\ \dfrac{E-E_0}{E_0}\cdot\dfrac{\sigma_n}{\sigma^2}\operatorname{sgn}\sigma & ; \quad |\sigma| > \sigma_n. \end{cases} \tag{3.15}$$

Făcînd înlocuirile se obține :

$$\psi = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{E-E_0}{2E_0}\cdot(|\sigma|-\sigma_n)^2; \quad |\sigma| > \sigma_n. \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\psi' = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{E - E_0}{E_0} \cdot (\sigma_n \operatorname{sgn} \sigma - \sigma) \; ; \; |\sigma| > \sigma_n . \end{cases} \tag{3.17}$$

Definiția 3.1. Se numește sistem extremal de bare cu model neliniar elastic sistemul fizic realizabil caracterizat prin modelul matematic

$$\begin{cases} \tilde{E}(S) \to min \\ \text{ecuații de echilibru.} \end{cases} \tag{3.18}$$

Pentru a cuprinde majoritatea situațiilor posibile, se va trata această problemă în următoarele cazuri :

3.2.1. SISTEME EXTREMALE SPAȚIALE

Fie sistemul $\mathcal{S}$. Sistemul extremal corespunzător va avea conform definiției 3.1 următorul model matematic

$$< AS, \; S > + \tilde{E}(S) \to min, \tag{3.19}$$

cu ecuațiile de echilibru

$$B \begin{bmatrix} N \perp J_N \\ M_l^{\mathrm{I}} \perp J_l^{\mathrm{I}} \\ M_s^{\mathrm{I}} \perp J_s^{\mathrm{I}} \\ M_l^{\mathrm{II}} \perp J_l^{\mathrm{II}} \\ M_s^{\mathrm{II}} \perp J_s^{\mathrm{II}} \\ M_{st} \perp J_{st} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_{M_x} \\ P_{M_y} \\ P_{M_z} \end{bmatrix}, \tag{3.20}$$

unde B este precizată în cap. I.

Folosind expresia energiei potențiale și operațiile $\perp$, $\top$, se arată în [163] că matricea A are următoarea formă (3.21).

Dacă $\mathcal{S}$ (α, β, γ, δ, μ) are toate nodurile rigide, modelul matematic se va simplifica (vezi cap. I pentru ecuațiile de echilibru, iar matricea A va deveni (3.22)).

Scanned with OKEN Scanner

$$
(3.21)\quad A=\begin{bmatrix}
((\ldots)\,J_N)\top J_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & ((\ldots)\perp J_l^{\mathrm{I}})\top J_l^{\mathrm{I}} & ((\ldots)\perp J_s^{\mathrm{I}})\top J_s^{\mathrm{I}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & ((\ldots)\perp J_l^{\mathrm{I}})\top J_s^{\mathrm{I}} & ((\ldots)\perp J_s^{\mathrm{I}})\top J_s^{\mathrm{I}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & ((\ldots)\perp J_l^{\mathrm{II}})\top J_l^{\mathrm{II}} & ((\ldots)\perp J_s^{\mathrm{II}})\top J_l^{\mathrm{II}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & ((\ldots)\perp J_l^{\mathrm{II}})\top J_s^{\mathrm{II}} & ((\ldots)\perp J_s^{\mathrm{II}})\top J_s^{\mathrm{II}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ((\ldots)\perp J_{st})\perp J_{st})
\end{bmatrix},
$$

$$
(3.22)\quad A=\begin{bmatrix}
LR_N^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{3}LR_{M_l^{\mathrm{I}}}^{-1}+L^{-1}R_{Q_{\mathrm{I}}}^{-1} & \frac{1}{6}LR_{M_{l,\,s}^{\mathrm{I}}}^{-1}-L^{-1}R_{Q_{\mathrm{I}}}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{6}LR_{M_{l,\,s}^{\mathrm{I}}}^{-1}-L^{-1}R_{Q_{\mathrm{I}}}^{-1} & \frac{1}{3}LR_{M_s^{\mathrm{I}}}^{-1}+L^{-1}R_{Q_{\mathrm{I}}}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}LR_{M^{\mathrm{II}}}^{-1}+L^{-1}R_{Q_{\mathrm{II}}}^{-1} & \frac{1}{6}LR_{M_{l,\,s}^{\mathrm{II}}}^{-1}-L^{-1}R_{Q_{\mathrm{II}}}^{-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{6}LR_{M_{l,\,s}^{\mathrm{II}}}^{-1}-L^{-1}R_{Q_{\mathrm{II}}}^{-1} & \frac{1}{3}LR_{M_{l,\,s}^{\mathrm{II}}}^{-1}+LR_{Q_{\mathrm{II}}}^{-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & LR_t^{-1}
\end{bmatrix}.
$$

Scanned with OKEN Scanner

unde s-a notat prin

$$R_N,\ R_{M_l^{\mathrm{I}}},\ R_{Q_{\mathrm{I}}},\ R_{M_{l,s}},\ R_{M_s^{\mathrm{I}}},\ R_{M_l^{\mathrm{II}}},\ R_{Q_{\mathrm{II}}},\ R_{M_{l,s}^{\mathrm{II}}},\ R_t$$

caracteristicile de rigiditate ale elementelor componente ale lui $\mathcal{S}$.

$$R_N(\ )=\begin{bmatrix} R_{N,1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & R_{N,\rho} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & R_{N,\mu} \end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

$$R_{N,\rho}=\frac{d_\rho}{\int_0^{d_\rho}\frac{ds}{EA_\rho}}, \tag{3.24}$$

$$R_{M_l}(\ )=\begin{bmatrix} R_{M_{l,1}}(\ ) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & R_{M_{l,\rho}}(\ ) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & R_{M_{l,\mu}}(\ ) \end{bmatrix}, \tag{3.25}$$

$$R_{M_{l,\rho}}=\frac{d_\rho}{3\int_0^{d_\rho}\left(1-\frac{s}{d_\rho}\right)\frac{ds}{EI_\rho}}, \tag{3.26}$$

$$R_Q(\ )=\begin{bmatrix} R_{Q_1}(\ ) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & R_{Q_\rho}(\ ) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & R_{Q_\mu}(\ ) \end{bmatrix}, \tag{3.27}$$

Scanned with OKEN Scanner

(3.28) $$R_{Q_\rho} = \frac{d_\rho}{\int_0^{d_\rho} \frac{k\,ds}{G_s A_\rho}},$$

(3.29) $$R_{M_s^{(\,)}} = \begin{bmatrix} R_{M_{s,1}^{(\,)}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{M_{s,\rho}^{(\,)}} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & R_{M_{s,\mu}^{(\,)}} & \end{bmatrix},$$

(3.30) $$R_{M_{s,\rho}^{(\,)}} = \frac{d_\rho}{3\int_0^{d_\rho} \left(\frac{s}{d_\rho}\right)^2 \frac{ds}{E\,I_\rho}},$$

(3.31) $$R_{M_{l,s}^{(\,)}} = \begin{bmatrix} R_{M_{l,s,1}^{(\,)}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{M_{l,s,\rho}^{(\,)}} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & R_{M_{l,s,\mu}^{(\,)}} & \end{bmatrix},$$

(3.32) $$R_{M_{l,s,\rho}^{(\,)}} = \frac{d_\rho}{6\int_0^{d_\rho} \left(1-\frac{s}{d_\rho}\right) \frac{s}{d_\rho} \frac{ds}{E\,I_\rho}},$$

(3.33) $$R_t = \begin{bmatrix} R_{t,1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{t,\rho} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & R_{t,\mu} & \end{bmatrix},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$R_{t,\rho}^{-}=\frac{d_\rho}{\int_0^{d_\rho}\frac{ds}{G\,I_{t,\,\rho}}}\,.$$

Observaţia 3.2. Parantezele ( ) neprecizate, se vor preciza în raport cu indicii care fixează axele de inerţie.

Dacă sistemul $\mathcal{S}$ (α, β, γ, δ, μ) este o fermă, matricea A devine : $A=LR^{-1}$, unde

$$R^{-1}=\begin{bmatrix} EA_1 & & & \\ & EA_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & EA_\mu \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

şi

$$L=\left[\sqrt[*]{(XI^l)^{*2}+(YI^l)^{*2}+(ZI^l)^{*2}}\right]. \tag{3.35}$$

Observaţia 3.3. În cazul în care $\mathcal{S}$ are secţiunile constante, formulele analizate mai sus se simplifică mai mult şi devin

$$R_{N,\,\rho}=EA_\rho \quad R_{M_{l,\,\rho}^{(\,)}}=R_{M_{s,\,\rho}^{(\,)}}=R_{M_{l,\,s,\,\rho}^{(\,)}}=EI_\rho \tag{3.36 / 3.37}$$

$$R_{Q,\,\rho}=\frac{1}{k}GA_\rho. \tag{3.38}$$

3.2.2. SISTEME EXTREMALE SPAŢIALE CU MODEL LINIAR ELASTIC

Se consideră sistemul $\mathcal{S}$ (α, β, γ, δ, μ), unde relaţia între variabilele geometrice (deplasările) şi variabilele mecanice (forţele) este liniară, adică este valabilă legea lui Hooke-Mariotte.

Definiţia 3.2. Se numeşte sistem extremal de bare cu model liniar elastic sistemul fizic realizabil caracterizat prin modelul matematic

$$\begin{cases} \langle AS,\ S\rangle \rightarrow min \\ \text{ecuaţii de echilibru.} \end{cases} \tag{3.39}$$

Scanned with OKEN Scanner

Observația 3.4. Formulele (3.20÷3.38) rămîn valabile și în acest caz.

Pentru simplificarea scrierii, condițiile de echilibru (3.20) se vor folosi scrise sub forma

$$f^k(S)=0, \quad k=\overline{1, M-n}, \tag{3.40}$$

unde M reprezintă numărul eforturilor căutate, iar n gradul nedeterminării statice

Se consideră funcția auxiliară $F: R^{2M-n} \to R$

$$F(S, u)=V(S)+\sum_{j=1}^{M-n} u_j f^j(S), \tag{3.41}$$

unde u sînt variabile arbitrare. Fie K mulțimea static admisibilă

Derivatele parțiale ale funcției $F(S, u)$ se împart în:

a) Derivatele parțiale față de u

$$\frac{\partial F(S, u)}{\partial u_i} \begin{cases} f(S), & \text{dacă } S \notin K \\ 0, & \text{dacă } S \in K, \end{cases} \tag{3.42}$$

care nu sînt altceva decît condițiile de echilibru. Făcîndu-le egale cu zero ne asigurăm pur și simplu că forțele aplicate sistemului $\mathcal{S}$ sînt în echilibru.

b) Derivatele parțiale față de S

$$\frac{\partial V(S)}{\partial S_i}+\sum_{j=1}^{M-n} u_j \frac{\partial f^j(S)}{\partial S_i}=\frac{\partial F(S, u)}{\partial S_i}, \quad i=\overline{1, M}. \tag{3.43}$$

Făcîndu-le egale cu zero, se obține sistemul de ecuații liniare

$$\frac{\partial V(S)}{\partial V_i}+\sum_{j=1}^{M-n} u_j \frac{\partial f^j(S)}{\partial S_i}=0, \quad i=\overline{1, M}. \tag{3.44}$$

Condițiile de minim pentru funcția $F(S, u)$ sînt

$$\frac{\partial F(S, u)}{\partial S_i}=0, \quad i=\overline{1, M} \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial F(S, u)}{\partial u_j}=0, \quad i=\overline{1, M-n}. \tag{3.46}$$

Observația 3.5. Ecuațiile (3.45, 3.46) dau $2M-n$ ecuații pentru cele $2M-n$ necunoscute $(S_1, S_2, \ldots S_M, u_1, u_2, \ldots, u_{M-n})$.

Fie $(\bar{S}, \bar{u})$ o soluție a sistemului (3.45—3.46).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă forțele care intervin în ecuația a i-a nu se echilibrează, atunci

$$f^i(S) \neq 0, \quad \text{adică} \quad f^i(S) = a_i.$$

Aceasta, atrage după sine o modificare a energiei sistemului $\mathcal{S}$.

Efectul asupra valorii minime a energiei sistemului este dat de relația

$$\frac{\partial V^{min}(S)}{\partial a_i} = \sum_j \frac{\partial V(\bar{S})}{\partial S^j} \cdot \frac{\partial S_j}{\partial a_i}, \tag{3.47}$$

dar din condițiile de echilibru

$$\sum_j \frac{\partial f^k(\bar{S})}{\partial S_j} \cdot \frac{\partial S_j}{\partial a_i} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k \neq i \\ 1, & \text{dacă } k = i. \end{cases} \tag{3.48}$$

Înmulțind ecuație a k-a din (3.48) cu $\bar{u}_k$ și însumînd după k, rezultă

$$\sum_k \sum_j \bar{u}_k \frac{\partial f^k(\bar{S})}{\partial S_j} \cdot \frac{\partial S_j}{\partial a_i} = \bar{u}_i \tag{3.49}$$

Din (3.47) și (3.49) se deduc prin calcule simple

$$\frac{\partial V^{min}(S)}{\partial a_i} = \bar{u}_i + \sum \left[\frac{\partial f(\bar{S})}{\partial S_j} - \sum_k u_k \frac{\partial f^{(k)}(\bar{S})}{\partial S_j} \right] \frac{\partial S_j}{\partial a_i}. \tag{3.50}$$

Ținînd cont de condiția de optim se obține

$$\frac{\partial V^{min}(S)}{\partial a_i} = \bar{u}_i. \tag{3.51}$$

Astfel, u_i corespunde deplasării în urma modificării energiei sistemului pentru o modificare a restricției a i-a, celelalte rămînînd neschimbate.

În felul acesta s-a evidențiat dualitatea variabilelor $\bar{S}$ și $\bar{u}$.

Energia potențială a unui element aparținînd sistemului $\mathcal{S}$ (α, β, γ, δ, μ), cu notațiile din paragraful (1.2), se poate prezenta sub forma [163]

Scanned with OKEN Scanner

$$(3.52)\qquad V_{elem.}=0{,}5\left[M_l^{2\,(\mathrm{I})}\left(\frac{d}{3EI^{(\mathrm{I})}}+\frac{d^{-1}}{\frac{1}{k}GA^{(\mathrm{I})}}\right)+\right.$$

$$+M_s^{2\,(\mathrm{I})}\left(\frac{d}{3EI^{(\mathrm{I})}}+\frac{d^{-1}}{\frac{1}{k}GA^{(\mathrm{I})}}\right)+M_l^{(\mathrm{I})}M_s^{(\mathrm{I})}\left(\frac{d}{3EI^{(\mathrm{I})}}-\frac{2d^{-1}}{\frac{1}{k}GA^{(\mathrm{I})}}\right)+$$

$$+M_s^{2\,(\mathrm{II})}\left(\frac{d}{3EI^{(\mathrm{II})}}+\frac{d^{-1}}{\frac{1}{k}GA^{(\mathrm{II})}}\right)+M_s^{2\,(\mathrm{II})}\left(\frac{d}{3EI^{(\mathrm{II})}}+\frac{d^{-1}}{\frac{1}{k}GA^{(\mathrm{II})}}\right)+$$

$$\left.+M_l^{(\mathrm{II})}M_s^{(\mathrm{II})}\left(\frac{d}{3EI^{(\mathrm{II})}}-\frac{2d^{-1}}{\frac{1}{k}GA^{(\mathrm{II})}}\right)+\frac{N^2d}{EA}+\frac{M_{st}^2d}{GI_{st}}\right].$$

Notînd prin $M_l^{(\mathrm{I})}=S_i, \ldots, M_{st}=S_{i+5}$ și sumînd se obține energia potențială a întregului sistem

$$(3.53)\qquad V_{sist.}=0{,}5\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}c_{ij}S_iS_j.$$

Cu aceste precizări, sistemul extremal corespunzător lui $\mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu)$ devine

$$(3.54)\qquad \begin{cases} 0{,}5\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{M}c_{ij}S_iS_j\to min \\ \sum\limits_{j=1}^{M}\alpha_{ij}S_j=P_i, \quad i=\overline{1,\ M-n}. \end{cases}$$

Pentru acest caz teorema Kuhn-Tucker afirmă că $\tilde{S}=(S_1, S_2, \ldots, S_M)$ este soluția optimă, dacă și numai dacă există variabilele duale $\tilde{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_{M-n})$ cu proprietatea

$$(3.55)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{M}\alpha_{ij}\tilde{S}_j=P_i, \quad i=\overline{1,\ M-n} \\ \sum\limits_{k=1}^{M}c_{jk}\tilde{S}_k+\sum\limits_{i=1}^{M-n}\tilde{u}_i\alpha_{ij}=-c_j\,; \quad j=\overline{1,\ M}. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Acest sistem are $2M-n$ ecuaţii cu $2M-n$ necunoscute, rezolvarea căruia conduce la soluţia

$$(3.56)\qquad \begin{cases} \tilde{S}=A^{-1}B\,(B'A^{-1}B)^{-1}P \\ -\tilde{u}=(B'A^{-1}B)^{-1}P. \end{cases}$$

Observaţia 3.6. Toate eforturile S_i şi deplasările u_k se determină prin formule matriceale în funcţie de matricele cunoscute A şi B'. Dacă sistemul $\mathcal{S}$ este static determinat, atunci matricea echilibrului B' este pătrată şi se scrie

$$S=A^{-1}BB^{-1}(B')^{-1}P=(B')^{-1}P.$$

Adică, pentru determinarea eforturilor este suficient să se transforme matricea ecuaţiilor de echilibru.

Se consideră oportună o analiză a legăturilor dintre sistemul extremal analizat şi metodele clasice din mecanica construcţiilor [35].

1) Dacă la întocmirea matricei B' se practică izolarea nodurilor, atunci ecuaţiile (3.56) pot fi interpretate ca ecuaţiile canonice ale metodei mixte, faţă de alegerea specială a sistemului principal.

2) Metoda deplasărilor poate fi dedusă din $-\tilde{u}=(B'A^{-1}B)^{-1}P$, dacă această ecuaţie se scrie sub forma : $(B'A^{-1}B)\,\tilde{u}+P=0$.

3) Prezentarea ecuaţiei $\tilde{S}=A^{-1}B\,(B'A^{-1}B)^{-1}P$ sub forma : $A\tilde{S}-B\,(B'A^{-1}B)^{-1}P=0$ reprezintă ecuaţiile canonice din metoda forţelor [72, 155].

3.2.3. SISTEME EXTREMALE PLANE – MODELUL LINIAR ELASTIC

Particularizarea relaţiilor sistemelor spaţiale conduce în mod natural la obţinerea expresiilor caracteristice sistemelor extremale plane.

Fie sistemul $\mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu)$ şi $\mathcal{S}^p$ un element al său. Parametrii consideraţi vor fi M_t, M_s şi N (vezi cap. I).

Definiţia 3.3. Se numeşte sistem plan extremal de bare cu model liniar elastic sistemul fizic realizabil caracterizat de modelul matematic

$$\langle AS,\ S\rangle \to min$$

Scanned with OKEN Scanner

$$
(3.57)\quad \begin{bmatrix} I\alpha_x \perp J_N & -I\alpha_y L^{-1} \perp J_i & I\alpha_y L^{-1} \perp J_s \\ I\alpha_y \perp J_N & I\alpha_x L^{-1} \perp J_i & -I\alpha_x L^{-1} \perp J_s \\ 0 & (I' \top J_A) \perp J_i & (I' \top J_A) \perp J_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \top J_N \\ M_i \top J_i \\ M_s \top J_s \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_M \top J_A \end{bmatrix}.
$$

Observaţia 3.7. Din (3.20) pentru sistemul plan matricea A primeşte următoarea formă

$$
(3.58)\quad A = \begin{bmatrix} ((LR_N^{-1}) \perp J_N) \perp J_N & 0 & 0 \\ 0 & \left(\left(\frac{1}{3} LR_{M_i}^{-1} + L^{-1}R_Q^{-1}\right) \perp J_i\right) \top J_i & \left(\left(\frac{1}{6} LR_{M_{i,s}}^{-1} - L^{-1}R_Q^{-1}\right) \perp J_s\right) \top J_i \\ 0 & \left(\left(\frac{1}{6} LR_{M_{i,s}}^{-1} - L^{-1}R_Q^{-1}\right) \perp J_i\right) \top J_s & \left(\left(\frac{1}{3} LR_{M_s}^{-1} + L^{-1}R_Q^{-1}\right) \perp J_s\right) \top J_s \end{bmatrix}.
$$

Observaţia 3.8. Soluţiile optime se obţin evident din (3.56) pentru matricea B şi A calculate în acest caz.

Se vor analiza în continuare unele aspecte pe care le ridică sistemele static nedeterminate care conţin o parte geometric invariabilă cu legături obişnuite, avînd legături suplimentare monolaterale. Întrebarea care se pune în acest caz este stabilirea legăturilor monolaterlale care vor participa la acţiunea încărcării propuse. Răspunsul este dat de J. M. Rabinovici [153] : dacă în sistem există n legături monolaterale, atunci se pot forma cu ajutorul diverselor variante 2^n sisteme active. Analiza acestor sisteme se poate executa automat folosind definiţia 3.1 din acest paragraf.

După cum s-a definit, energia potenţială este o funcţională pătratică a eforturilor necunoscute.

Scanned with OKEN Scanner

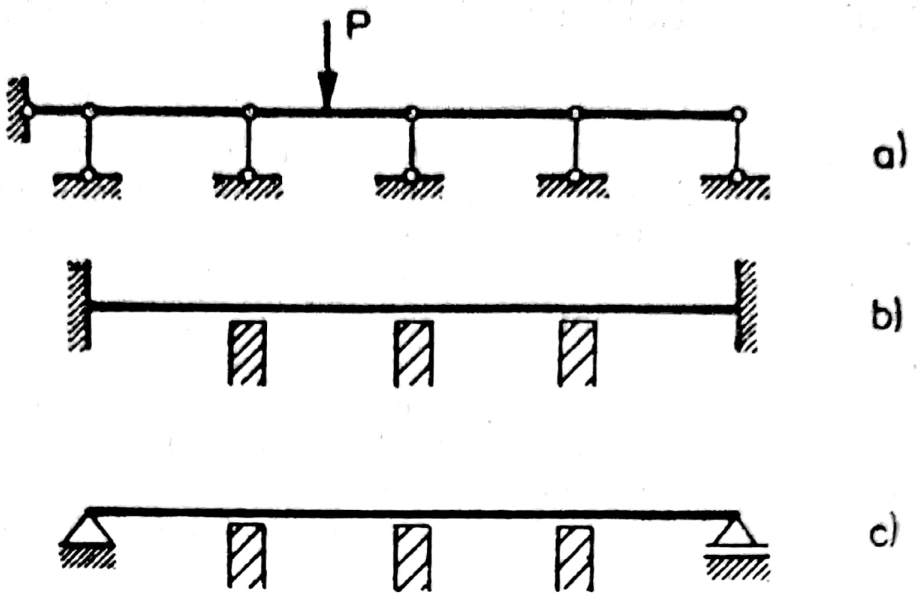


Fig. 3.3.

Se poate arăta ușor [72] că expresia energiei potențiale este dată de

$$V=V_0+0{,}5\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\delta_{ij}S_iS_j+\sum_{j=1}^{M}\Delta_{ip}\,S_j, \tag{3.59}$$

unde : $\delta_{ij}, \ldots, \Delta_{ip}$ sînt deplasările din sistem, care se pot determina ușor după formule cunoscute.

S. P. Portaev și V. G. Eațura analizează sistemele în care energia potențială poate fi reprezentată ca o funcțională liniară. Astfel, în [143] ei arată că acest lucru este posibil în cazul următoarelor sisteme :

1) Sistem static nedeterminat cu legături obișnuite.

2) Sisteme cu legături suplimentare monolaterale, care au o parte geometrică invariabilă cu legături obișnuite.

3) Sisteme care conțin numai legături monolaterale.

Pentru detalii se poate consulta [56, 73, 136, 144].

Un mod eficient de a liniariza sistemul poate fi efectuat prin liniarizări pe rețele [188], obținîndu-se întodeauna o interpolare acceptabilă.

Rezolvarea acestor sisteme poate fi efectuată pe calculatorul Felix C-256, folosind programul BEALE. Pentru aceasta, așa cum se arată în [40], se vor folosi următoarele subprograme : ABMAX, MINISIR, LINPIV, PIVOT, PATRAT.

Scanned with OKEN Scanner

3.3. SISTEME EXTREMALE CU MODEL ELASTO-PLASTIC

Plasticitatea ideală este o primă aproximare a comportării reale a unui sistem, dincolo de limita elasticității. Se consideră sistemul $\mathcal{S}$ supus la încovoiere, avînd secțiunile elementelor de o formă ideală și asupra căruia acționează p forțe independente P_i, $i=\overline{1, p}$. Capacitatea portantă a sistemului se analizează în următoarele situații [35] :

a) Distrugerea plastică simplă, cînd încărcarea este de forma $P_i=\lambda P_j$, iar epuizarea capacității portante se va produce în urma creșterii nelimitate a deformațiilor plastice.

b) Distrugerea plastică ciclică, cînd avem o încărcare variabilă (adică $P_i^{min}<P_i<P_i^{max}$).

Epuizarea capacității portante va avea loc în acest caz prin distrugere progresivă.

Definiția 3.4. Se numesc secțiuni periculoase, acele secțiuni ale sistemului $\mathcal{S}$ în care pot fi încălcate condițiile rezistenței.

Se notează cu i numărul de ordine al acestor secțiuni.

Definiția 3.5 Se numește articulație plastică, secțiunea care a trecut în întregime în stare plastică.

Observația 3.9. Articulația plastică transmite în întregime momentul limită M^{lim}. În felul acesta capacitatea portantă se va caracteriza prin M^{lim}.

Starea de deformare a sistemului $\mathcal{S}$ se caracterizează prin cîmpul vitezelor deformației plastice. Pentru cazul analizat, viteza deformației plastice va fi creșterea unghiului de rotație θ în articulația plastică în unitatea de timp. Fie $\theta=(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ un element al cîmpului. Energia disipată de deformația plastică în unitatea de timp va fi dată prin produsul scalar :

$$E_{dis}=<M^{lim}, |\theta|>. \tag{3.60}$$

Observația 3.10. Semnul pentru vitezele deformației plastice este același cu semnul momentului de încovoiere. Fie θ' valoarea pozitivă a creșterii lui θ și θ'' cea negativă.

Definiția 3.6. Se numește mecanismul distrugerii, repartizarea vitezelor deformației plastice în tot sistemul.

În cazul distrugerii plastice simple, așa cum se știe, mecanismul distrugerii reprezintă totdeauna un lanț cinematic. Nu se poate spune însă același lucru în cazul distrugerii plastice ciclice [35].

Scanned with OKEN Scanner

Starea de deformație se mai poate caracteriza și prin creșterea deplasării secțiunii (liniară sau unghiulară) în unitatea de timp. Fie k gradul nedeterminării statice a sistemului $\mathcal{S}$, $v=(v_1, v_2, \ldots, v_{n-k})$ un element din cîmpul vitezelor deplasărilor și n — numărul secțiunilor periculoase propuse. Acțiunea realizată de forțele exterioare P_j, $j=\overline{1, n-k}$ pentru deplasarea sistemului în unitatea de timp se caracterizează prin următorul produs scalar

$$\omega=\langle P, v\rangle. \tag{3.61}$$

Observația 3.11. Modelele care se dezvoltă pentru distrugerea plastică vor fi formulate în forțe sau deplasări (deformații). În felul acesta există posibilitatea de a dezvolta o teorie a dualității statico-cinematice.

Definiția 3.6. Se numește sistem extremal de bare cu model elastoplastic, sistemul fizic realizabil caracterizat prin modelul matematic

$$\begin{cases} \langle M^{lim}, |\theta|\rangle \to min \\ \text{Repartizarea admisă a eforturilor} \\ \text{cîmpului static posibil.} \end{cases} \tag{3.62}$$

În vederea concretizării definiției 3.7, în cazul distrugerii plastice simple, se consideră sistemul $\mathcal{S}$ de k ori static nedeterminat, acînd n secțiuni periculoase și fiind supus sarcinilor externe P_j, $j=\overline{1, n-k}$. Energia disipată în acest caz se scrie

$$\begin{cases} \tilde{E}=\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} M_i^{lim}\,\theta_i, & \text{dacă } \theta_i>0 \\ -\sum\limits_{i=1}^{n} M_i^{lim}\,\theta_i & \text{dacă } \theta<0 \end{cases} \to min \\ -M_i^{lim} \leqslant M_i \leqslant M_i^{lim},\ i=\overline{1, n} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} M_i = P_j, \quad j=\overline{1, n-k}. \end{cases} \tag{3.63}$$

Scanned with OKEN Scanner

Avînd în vedere următoarele ipoteze [35]

$$
(3.64)\qquad
\begin{aligned}
&\text{a)}\ M_i^{lim}=\mu_i M^{lim}\\
&\text{b)}\ \sum_{i=1}^{n}\mu_i\theta_i\equiv\begin{cases}1, & \text{dacă } \theta_i>0\\ -1, & \text{dacă } \theta_i<0,\end{cases}
\end{aligned}
$$

sistemul (3.63) se transformă într-un sistem liniar, echivalent

$$
(3.65)\qquad
\begin{aligned}
&M^{lim}\to min\\
&\begin{cases}\mu_i M^{lim}-M_i\geqslant 0, & i=\overline{1,\ n}\\ \mu_i M^{lim}+M_i\geqslant 0\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{ij}M_i=P_j, & j=\overline{1,\ n-k},\end{cases}\\
&M^{lim}\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Acum se poate pune în evidenţă mecanismul distrugerii plastice simple construind dualul sistemului extremal analizat

$$
(3.66)\qquad
\begin{cases}
<P,\ v>=\sum\limits_{j=1}^{n-k}P_j v_j\to max\\
\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i\theta_i\leqslant 1, & \text{dacă } \theta_i>0\\
\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i\theta_i\geqslant -1, & \text{dacă } \theta_i<0\\
\theta_i=\sum\limits_{j=1}^{n-k}\alpha_{ij}v_j, & i=\overline{1,\ n}.
\end{cases}
$$

Observaţia 3.12. Sistemul (3.63) mai poate fi liniarizat şi folosind metoda reţelelor [188].

Dacă încărcarea P_j are un caracter variabil, apar cicluri de deformaţie plastică a căror acumualre conduc la distrugerea plastică progresivă. În baza teoremelor distrugerii plastice ciclice se poate

Scanned with OKEN Scanner

formula următorul sistem extremal (corespunzător sistemului precizat $\mathcal{S}$)

$$(3.67)\qquad \tilde{E}=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} M_i^{lim}\,\theta_i, & \text{dacă } \theta_i>0\\ -\sum\limits_{i=1}^{n} M_i^{lim}\theta_i, & \text{dacă } \theta_i<0\end{cases}\rightarrow min$$

$$-M_i^{lim}-(M_i^e)_{min}\leqslant m_i\leqslant M_i^{lim}-(M_i^e)_{max},\quad i=\overline{1,\ n}$$

$$(3.68)\qquad \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}m_i=0\qquad j=\overline{1,\ n-k},$$

unde $(M_i^e)_{max}$, $(M_i^e)_{min}$ sînt momentele încovoietoare elastice în secţiunea i, iar m_i momentul rezidual în aceeaşi secţiune.

Liniarizarea sistemului conform ipotezelor (3.64) permite scrierea

$$M^{lim}\rightarrow min$$

$$(3.69)\qquad \begin{cases}\mu_i M^{lim}-m_i\geqslant(M_i^e)_{max}\\ \mu_i M^{lim}+m_i\geqslant-(M_i^e)_{min}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{ij}m_i=0,\quad j=\overline{1,\ n-k}\end{cases}$$

$$M^{lim}\geqslant 0.$$

Formularea duală a modelului extremal cu distrugerea plastică ciclică [35]

$$\sum_{i=1}^{n}((M_i^e)_{max}\,\theta_i-(M_i^e)_{min}\,\theta_i'')\rightarrow max$$

$$(3.70)\qquad \begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(\theta_i'+\theta_i'')\leqslant 1\\ -\theta_i'+\theta_i''+\sum\limits_{j=1}^{n-k}\alpha_{ij}v_j=0\\ \theta_i'\geqslant 0\quad \theta_i''\geqslant,\ 0\quad i=\overline{1,\ n}.\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Observaţia 3.13. Conform celor prezentate în acest paragraf, trebuie subliniată proprietatea remarcabilă de dualitate a modelelor analizate. Fiecărui principiu de minim asupra repartizării unor variabile îi corespunde principiul de maxim referitor la repartizarea altor variabile. Această proprietate permite folosirea cu succes a concluziilor şi metodelor teoriei matematice a dualităţii în formularea şi analiza sistemelor extremale (cap. II).

3.4. SISTEME CU GREUTATE MINIMĂ

3.4.1. GENERALITĂŢI

Pentru sistemul spaţial $\mathcal{S}$ greutatea sa se consideră compusă din greutatea fiecărui element $A_i l_i \gamma$ şi greutatea detaliilor constructive (gusee, diafragme, nervuri de rigidizare) $g_i = g_i(A_i)$. Greutatea întregului sistem poate fi exprimată prin următoarea funcţie de greutate

$$G = \gamma \sum_{i=1}^{k} A_i l_i g_i(A_i), \tag{3.71}$$

unde : γ reprezintă greutatea specifică a materialului, iar l_i lungimea barelor.

Definiţia 3.7. Se numeşte sistem de bare cu greutate minimă sistemul extremal

$$G \to min$$

$$\begin{cases} \text{condiţii de rezistenţă,} \\ \text{condiţii de stabilitate,} \\ \text{ecuaţii de stare.} \end{cases} \tag{3.72}$$

Exemplul 3.1 Pentru o fermă spaţială static nedeterminată definiţia 3.8 poate fi interpretată în felul următor (cap. I)

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia de greutate

$$\gamma \sum_{i=1}^{k} A_i l_i \to min$$

$$(3.73)\quad \begin{cases} -N_i + RA_i \geqslant 0\} \text{ condiţiile de rezistenţă} \\ \left.\begin{array}{l} N_i + \varphi_i(A_i)\, RA_i \geqslant 0 \\ A_i \geqslant A_{i0} \end{array}\right\} \text{condiţiile de stabilitate} \\ f_c \leqslant f_0 \\ \left.\begin{array}{l} \underset{(q\times k)}{A}\ \underset{(k\times 1)}{S} = \underset{(q\times s)}{B}\ \underset{(s\times 1)}{P} \\ \underset{(k\times 1)}{D} = \underset{(k\times q)}{C}\ \underset{(q\times 1)}{U} \\ \underset{(k\times 1)}{S} = \mathrm{E}\ \underset{(k\times k)}{\mathrm{F}}\ \underset{(k\times 1)}{\mathrm{D}} \end{array}\right\} \text{ecuaţiile de stare} \end{cases}$$

Observaţia 3.14. Parametrii greutăţii permit să se evalueze economicitatea sistemului după cantitatea materialului consumat. Astfel, indicele greutăţii determină consumul de material pe unitatea de lungime, iar coeficientul constructiv dă imaginea greutăţii globale a sistemului.

Dacă se consideră o fermă static determinată din oţel, greutatea ei se poate exprima prin [40]

$$(3.74)\qquad G = \gamma\psi \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{R} l_i,$$

unde : γ — greutatea specifică a metalului, R rezistenţa de calcul, ψ — coeficient constructiv al fermei, l_i — lungimea barei a i-a, N_i valoarea absolută a efortului în bara a i-a.

Fie q_j intensitatea încărcării uniforme de ordinul j din cele m încărcări temporare, şi g intensitatea greutăţii proprii a fermei. Atunci efortul în bara i se scrie

$$(3.75)\qquad N_i = \sum_{j=1}^{m} q_j \bar{N}_i^j + g\bar{N}_i^g,$$

unde

$$\bar{N}_i = N_i^j \quad \text{pentru } q_j = 1$$

şi

$$\bar{N}_i^g = N_i^g \quad \text{pentru } g = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Considerînd greutatea fermei uniform distribuită pe deschiderea sa L, se poate calcula greutatea ei

$$G=gL=\frac{\gamma}{R}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} q_j \overline{N}_i^j l_i \psi_i + g\,\overline{N}_i^g l_i \psi_i\right), \tag{3.76}$$

ψ_i — coeficientul constructiv al barei a i-a.

De aici rezultă indicele greutăţii

$$g=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} q_i \overline{N}_i^j l_i \psi_i}{\frac{LR}{\gamma}-\sum_{i=1}^{n}\overline{N}_i^g l_i \psi_i}=\frac{\Sigma q \,\Sigma \frac{\overline{N}_i^j l_i \psi_i}{L^3}}{\frac{R}{\gamma}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{N}_i^g l_i \psi_i}{L^2}L}\cdot L=\alpha_i L. \tag{3.77}$$

Valorile g, α, coeficientul de greutate şi ψ se numesc parametrii greutăţii.

Indicele greutăţii g determină consumul de metal pe unitatea de lungime, iar coeficientul constructiv dă imaginea asupra greutăţii totale a sistemului în raport cu greutatea teoretică calculată.

Observaţia 3.15. Dacă nu se ţine seama de greutatea detaliilor constructive şi de limitările tehnologice, atunci funcţia de greutate se simplifică la forma

$$G=\gamma\sum_{i=1}^{n}\omega_i=\gamma\,\Sigma A_i l_i, \tag{3.78}$$

unde ω_i reprezintă greutatea liniară a berei a i-a

3.4.2. GREUTATEA SISTEMELOR ECHIREZISTENTE

Avîndu-se în vedere rezultatele din [102, 167, 183], se poate da următoarea definiţie.

Definiţia 3.9. Se numeşte sistem echirezistent, un sistem cu greutate minimă caracterizat de următorul model matematic

$$\begin{cases} G=\gamma\,\Sigma A_i l_i \to min \\ \text{condiţii de rezistenţă} \\ \text{ecuaţii de echilibru.} \end{cases} \tag{3.79}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul unei singure variante de încărcare, minimul absolut al greutății corespunde unui subsistem echirezistent static determinat obținut prin eliminări de legături din sistemul static nedeterminat.

Exemplu 3.2 [168]. Fie schema geometrică din fig. 3.4, căreia îi corespunde sistemul $\mathcal{S}$ (2, 2, 1, 1)

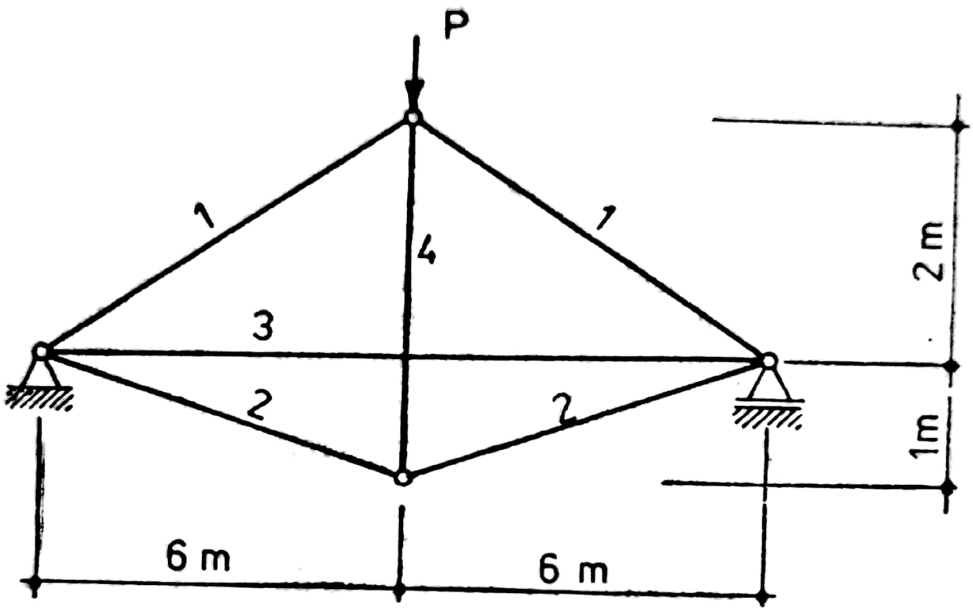


Fig. 3.4.

$$G=\gamma\,(12{,}64\,A_1+12{,}06\,A_2+12\,A_3+2{,}6\,A_4)\rightarrow min,$$

cu condițiile de rezistență

$$N_i+RA_i\geqslant 0$$

$$-N_i+RA_i\geqslant 0$$

și condițiile de echilibru

$$N_2=3{,}17\,N_1+5P$$

$$N_3=-4{,}11\,N_1-4{,}98P$$

$$N_4=-0{,}634\,N_1-P$$

$$A_i\geqslant 0.$$

Soluția optimă corespunde la $A_3=0$, ceea ce implică eliminarea barei 3. Schema optimă a fermei echirezistente va fi fig. 3.5.

Scanned with OKEN Scanner

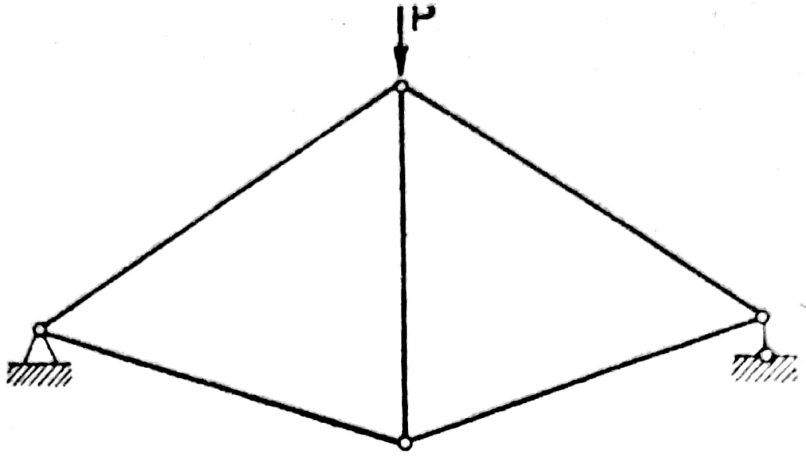


Fig. 3.5.

În toate secţiunile echirezistente minimul volumului consumat coincide cu minimul energiei potenţiale, dacă sînt satisfăcute condiţiile echilibrului şi anumite condiţii secţionale.

Se consideră exemplul [168], o bară cu secţiune simetrică încastrată la capete şi supusă la încovoiere. Greutatea grinzii se poate scrie

$$G=\gamma\int_0^l A(z)\,dz=\gamma\int_0^l \frac{A\cdot W}{I\sigma}\cdot\frac{h}{z}\sigma\,dz=\frac{\gamma}{2}\int_0^l \frac{|M|\,h}{r^2\sigma}\,dz, \tag{3.80}$$

unde: σ este valoarea absolută a tensiunii normale în fibra marginală, $|M|$ — valoarea absolută a momentului încovoietor, r — raza de inerţie a secţiunii transversale, z — coordonata de lungime a barei.

Energia potenţială a sistemului se scrie

$$U=\int_0^l \frac{M^2dz}{2EI}=\frac{1}{2E}\int_0^l \frac{M}{W}\cdot\frac{M}{\frac{h}{2}}\,dz=\frac{1}{E}\int_0^l \frac{\sigma\,|M|}{h}\,dz. \tag{3.81}$$

Dacă $h=\text{const.}$, $r=\text{const.}$, $\sigma=\text{const.}$, atunci

$$G=\frac{\gamma h}{2r^2\sigma}\int_0^l |M|\,dz;\quad U=\frac{\sigma}{Eh}\int_0^l |M|\,dz. \tag{3.81'}$$

Prin urmare, în condiţia echirezistenţei cu condiţiile constructive: înălţimea secţiunii constantă, raza de giraţie constantă, minimul volumului de material consumat corespunde la sistemul static determinat.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu 3.3. Se va analiza în cadrul sistemelor monodimensionale cu încovoiere predominantă influenţa forţelor longitudinale asupra valorilor momentelor limită pentru secţiuni dreptunghiulare şi dublu T, în ipoteza că punctul de aplicaţie al forţei de compresiune (întindere) se află pe axa de simetrie a secţiunii. În consecinţă

$$M^{lim}=f(N_{lim}). \tag{3.82}$$

Astfel, pentru secţiunea dreptunghiulară cu înălţimea h şi lăţimea b se poate scrie [104]

$$M_{lim}=\frac{\sigma_m bh^2}{4}\left(1-\frac{N^2_{lim}}{\sigma_c bh}\right), \tag{3.83}$$

unde σ_c este limita de curgere a materialului.

Deoarece $N_c=\sigma_c bh$ şi $M_c=\frac{1}{4}\sigma_c bh^2$ (N_c efortul normal limită în secţiune cînd lipseşte momentul de încovoiere şi M_c momentul de încovoiere limită cînd lipsesc forţele longitudinale), (3.82) devine

$$M_{lim}=M_c\left(1-\frac{N^2_{lim}}{N^2_c}\right). \tag{3.84}$$

Pentru secţiunea dublu T, cu o precizie suficientă, pot avea loc următoarele situaţii :

a) Axa neutră trece prin inimă

$$\frac{N_{lim}}{N_c}\leqslant\frac{A_{CT}}{A_1}, \tag{3.85}$$

iar relaţia (3.82) în acest caz va fi

$$\frac{M_{lim}}{M_c}=1-\frac{N^2_{lim}}{N^2_c}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{A_{II}}{A_I}\right)^2\left(1-\frac{t_1}{b}\right)}. \tag{3.86}$$

b) Axa neutră cade în talpă

$$\frac{N_{lim}}{N_c}>\frac{A_{CT}}{A_I} \text{ şi relaţia (3.82) devine} \tag{3.87}$$

$$\frac{M_{lim}}{M_c}=1-\frac{\left(\frac{N_{lim}}{N_c}\right)^2-\left(1-\frac{t_1}{b}\right)\left(\frac{N_{lim}}{N_c}-\frac{A_{CT}}{A_I}\right)}{1-\left(\frac{A_{II}}{A_I}\right)^2\left(1-\frac{t_1}{b}\right)}. \tag{3.88}$$

Scanned with OKEN Scanner

În ambele cazuri s-a nota tprin A_{CT} suprafața inimii, A_I suprafața totală a grinzii, A_{II} suprafața totală a tălpii, t_1 grosimea inimii și prin b lățimea tălpii.

Observația 3.16. Dacă $\frac{M_{lim}}{M_e} = 1 - \frac{N_{lim}}{N_e}$, atunci în profilul dublu T are loc practic epuizarea totală a capacității portante a secțiunii.

Funcția greutății $G = \Sigma \gamma_i l_i A_i$ se poate preciza în următoarele cazuri :

a) **Sistemul este un cadru** cu secțiuni transversale dreptunghiulare.

În acest caz suprafața secțiunii i are următoarea formă :

$$A_i = b_i\,[(h_{1i} - h_{2i}) + 2h_{2i}], \tag{3.89}$$

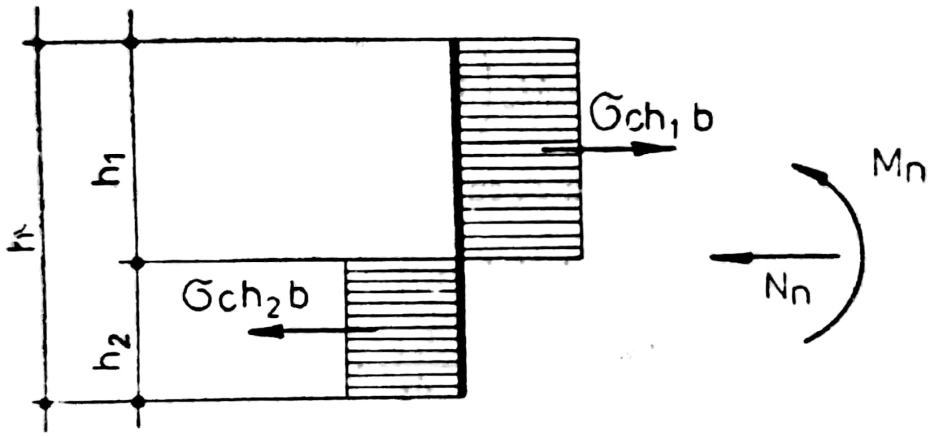


Fig. 3.6.

sau

$$A_i = \frac{1}{\sigma_c}\left(N^i_{lim} + \frac{2M^i_{lim}}{h_{1i}}\right). \tag{3.90}$$

Cu această precizare, funcția greutății devine

$$G = \sum_{i=1}^{m} \left| \gamma_i \frac{li}{\sigma_c} \left(\frac{2M^i_{lim}}{h_{1i}} + N^i_{lim} \right) \right|. \tag{3.91}$$

Se știe că eforturile normale vor fi funcții liniare omogene ale încărcărilor externe. De aici rezultă că în starea limită, efortu-

Scanned with OKEN Scanner

rile N_i vor fi funcţii liniare, omogene ale momentelor limită M^i_{lim} în articulaţiile plastice, adică

$$N_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} M_j \quad \text{(ecuaţiile echilibrului static)}, \tag{3.92}$$

unde n reprezintă numărul barelor în care se formează articulaţiile plastice.

Sistemul cu greutate minimă în acest caz va avea următorul model:

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \gamma_i \frac{l_i}{\sigma_c} \left(\frac{2M^i_{lim}}{h_{1i}} + N^i_{lim} \right) \right| \to min, \tag{3.93}$$

în condiţiile

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left. \begin{array}{l} -N^i_{lim} \leqslant N_i \leqslant N^i_{lim} \\ M^i_{lim} \leqslant M_i \leqslant M^i_{lim} \end{array} \right\} & \text{determină distribuirea nepericuloasă a momentelor de încovoiere şi a forţelor longitudinale} \\ \left. N_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} M_j \right\} & \text{distribuirea static posibilă a eforturilor şi a forţelor externe.} \end{array} \right. \tag{3.94}$$

Observaţia 3.17. Relaţiile conţin trei parametrii care caracterizează secţiunea transversală a elementului comprimat sau întins excentric; ei sînt h_1, h_2, b.

Dacă se fixează unul din ei, de exemplu h_1, atunci funcţia greutăţii va fi liniară în M^i_{lim} şi N^i_{lim}. Înlocuind în $N_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} M_j$ relaţia $M_{lim} = M_c \left(1 - \frac{N^2_{lim}}{N^2_c} \right)$ se obţine sistemul neliniar al condiţiilor de echilibru.

b) **Sistemul este arc.** Ca parametri necunoscuţi se aleg, de exemplu, valorile momentelor de grindă M^b_{oi} şi ordonatele arcului y_i (sau valorile eforturilor longitudinale limită N^i_{lim} şi momentele de grindă), [104].

Funcţia greutăţii în acest caz va fi

$$G = \sum_{i=1}^{m} \left| \gamma_i \frac{l_i}{\sigma_c} \left[\left(\frac{2}{h_{1i}} - \frac{1}{l_i} \right) M^b_{lim,\, i} - \left(\frac{2}{h_{1i}} + \frac{1}{l_i} \right) y_i H \right] \right|. \tag{3.95}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă secţiunile barelor sînt profile dublu T alcătuite din 3 dreptunghiuri, atunci relaţiile pot fi aduse la forma (3.84). Pentru proiectare trebuie propuse raportele

$$t_1/b\,; \quad A_{CT}/A_I\,; \quad A_{II}/A_I.$$

Observaţia 3.18. Echirezistenţa nu este întotdeauna condiţia necesară a minimului de greutate, deoarece, de exemplu, grinda care se află pe o bază elastică poate avea greutatea minimă fără a fi echirezistentă.

Pe de altă parte, se poate constata că dacă pe lîngă criteriile rezistenţei se introduc alte limitări, de exemplu, condiţiile stabilităţii, atunci echirezistenţa poate fi condiţie indispensabilă a greutăţii minime pentru orice sistem. Pentru aceasta se analizează, de exemplu, problema structurilor cu zăbrele la care se caută dispunerea optimă a nodurilor, care să conducă la un sistem cu greutate minimă.

Punctul de plecare îl constituie geometria iniţială la care numărul barelor şi îmbinărilor sînt unic determinate. Îmbinările (nodurile) pot fi articulate planar sau tridimensional. Cu acest procedeu nu se poate adăuga sau scoate automat elemente şi noduri în timpul procesului de proiectare automată.

Nodurile sînt deplasate în anumite direcţii care favorizează scăderea greutăţii sistemului cu respectarea condiţiilor impuse. Fie A_i aria secţiunii transversale a elementului i şi x_j coordonata nodului j. Procesul construirii sistemului de greutate minimă operează în două spaţii distincte : spaţiul ariilor secţiunilor transversale a barelor avînd un număr de dimensiuni p egal cu numărul barelor şi spaţiul coordonatelor nodurilor de dimensiune $2N_T$ sau $3N_T$. Se va ilustra acest procedeu pentru sistemul

$$\sum_{i=1}^{N_T} \rho_i A_i l_i \to min \tag{3.96}$$

în condiţiile

a) de rezistenţă

$$\sigma_{aci} \leqslant \sigma_i \geqslant \sigma_{ati}, \tag{3.96}$$

b) de stabilitate

$$\sigma_{fi} \leqslant \sigma_i, \tag{3.97}$$

c) de delimitare a ariilor secţiunilor transversale

$$A_{min} \leqslant A_i \leqslant A_{max}, \tag{3.98}$$

Scanned with OKEN Scanner

d) de delimitare a variabilelor coordonatelor

$$x_k^- \leqslant x_k \leqslant x_k^+. \tag{3.99}$$

Pentru uşurarea expunerii se scrie modelul sub următoarea formă :

$$G \to min, \tag{3.100}$$

în condiţiile

$$g_k(A_i, x_j) \leqslant 0\,; \quad K=\overline{1, N_c}\,; \; i=\overline{1, N_T}\,; \quad j=\overline{1, N_V}, \tag{3.101}$$

$$h_m(x_j) \leqslant 0, \quad m=\overline{1, N_{eg}}. \tag{3.102}$$

Se pleacă de la o geometrie iniţială şi se stabilesc ariile secţiunilor transversale care respectă (3.96÷3.98). Inegalităţile (3.99) sînt satisfăcute pentru că nu conţin variabile de arie. Dacă se schimbă cîteva din variabilele de coordonate x_j cu cantitatea Δx_j, greutatea totală se va schimba cu cantitatea

$$\frac{\partial G}{\partial x_j}\Delta x_j = \Delta x_j \sum_{i=1}^{N_T} \rho_i \left(A_i \frac{\partial L_i}{\partial x_j} + L_i \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right), \tag{3.103}$$

în care $\frac{\partial L_i}{\partial x_j}$ sînt determinate. În general, dacă $g(x+h)<0$ şi $g(x)<0$, rezultă că şi $dg(x)<0$.

Adică

$$\frac{dg_k}{dx_j}\Delta x_j = \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{N_e} \frac{\partial g_k}{\partial A_i} \cdot \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \Delta x_j \leqslant 0. \tag{3.104}$$

Este necesar acum aflarea necunoscutelor $\frac{\partial A_i}{\partial x_j}$ astfel ca să se respecte : $\frac{\partial G}{\partial x_j}\Delta x_j \to min$. În felul acesta se ajunge la următorul sistem liniar :

$$\frac{\partial G}{\partial x_j}\Delta x_j \to min, \tag{3.105}$$

$$\frac{dg_k}{\alpha x_j}\Delta x_j \leqslant 0, \tag{3.106}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde fiecare restricție g_k poate fi considerată ca funcție de A_i. Este suficient a presupune nodurile nehibride cu respectarea variabilelor de arie pentru ca inegalitățile

$$\frac{dg_k}{dx_j}\Delta x_j=\left(\frac{\partial g_k}{\partial x_j}+\frac{\partial g_k}{\partial A_i}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)\Delta x_j\leqslant 0 \tag{3.107}$$

să reprezinte un sistem de ecuații, fiecare avînd cîte o necunoscută $\frac{\partial A_i}{\partial x_j}$, care se află prin simpla procedură de comparare [53, 180].

Exemplu 3.3. Pentru exemplul din fig. 3.7, cu $T_N=3$, $A=A_1=A_2$, $x=x_1=-x_2$ se va menține fix nodul 3, urmînd ca nodu-

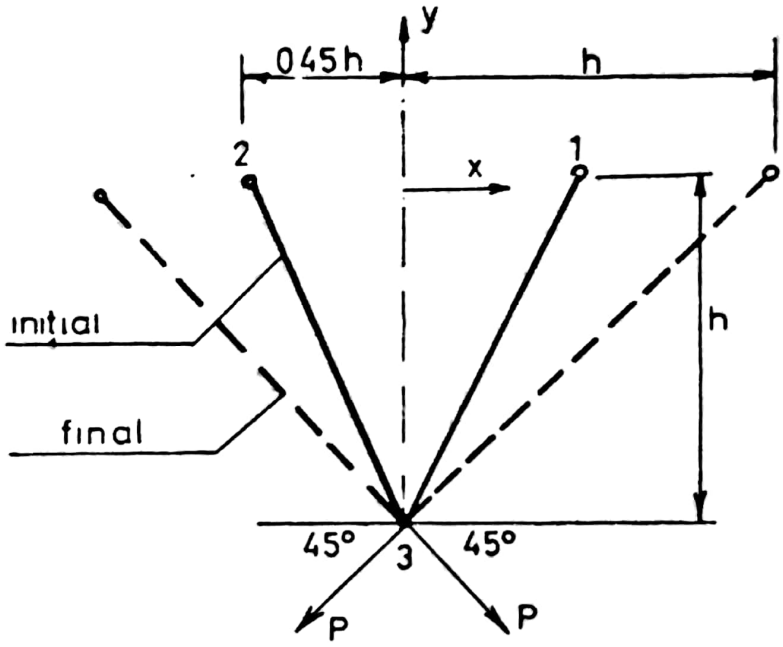


Fig. 3.7.

rile 1 și 2 să fie deplasate pentru a găsi sistemul extremal, plecînd de la sistemul descris prin următorul model:

$$G=2\rho AL=2\rho A\sqrt{h^2+x^2}\to min$$

$$-\sigma_a\leqslant\sigma_{ij}<\sigma_a,\quad i=1,2,\quad j=1,2$$

$$\sigma_{11}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{P}{A}\cdot\frac{h+x}{x}\cdot\frac{L}{h}=\sigma_{22}$$

$$\sigma_{21}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{P}{A}\cdot\frac{1}{h}\left(1-\frac{h+x}{2x}\right)=\sigma_{12}$$

$$A\leqslant A_{min}.$$

Scanned with OKEN Scanner

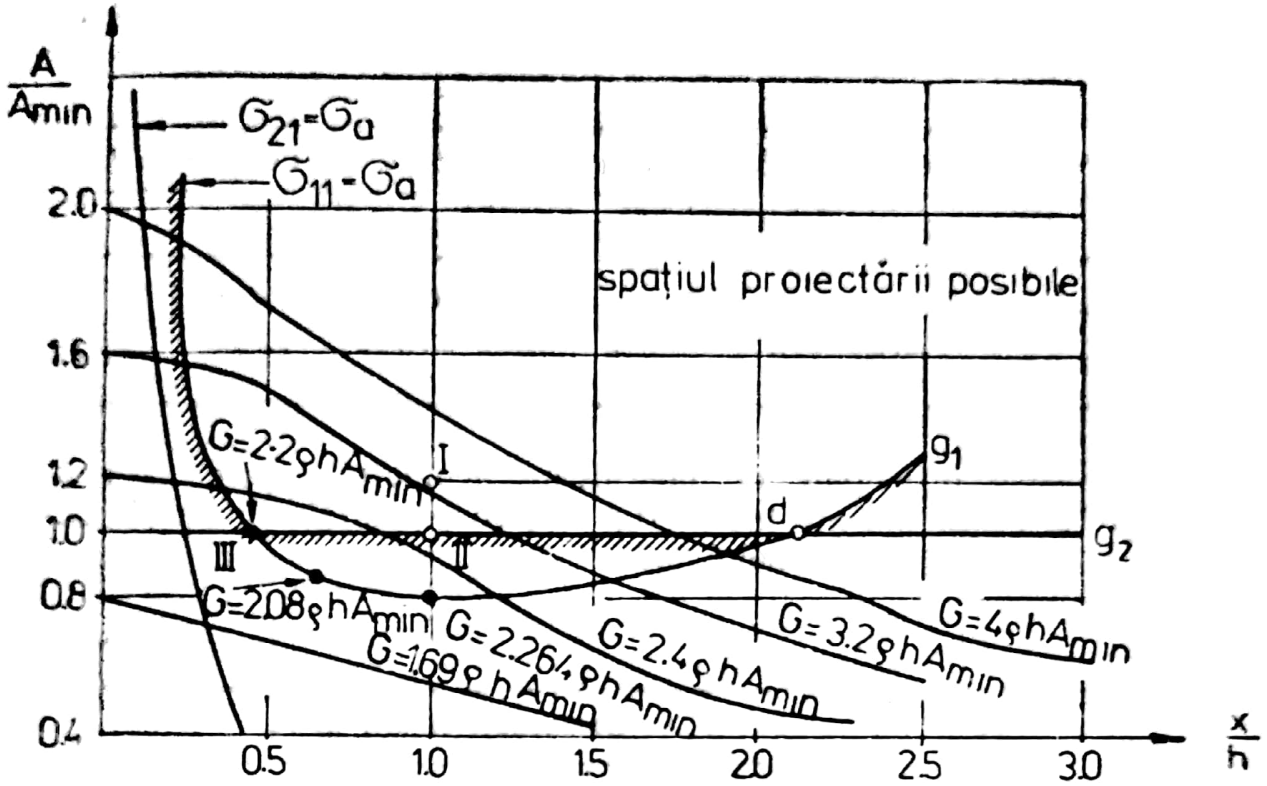


Fig. 3.8.

Deoarece $P=\sigma_a \cdot A_{min}$, pentru a reprezenta modelul în plan se retranscrie acest model sub forma :

$$G=2\rho A_{min}\, h\, \frac{A}{A_{min}} \sqrt{1+\left(\frac{x}{h}\right)^2}$$

$$g_1=\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\frac{A}{A_{min}}} \cdot \left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right) \sqrt{1+\left(\frac{x}{h}\right)^2}-1 \leqslant 0$$

$$g_2=1-\frac{A}{A_{min}} \leqslant 0.$$

Soluția problemei este notată pe fig. 3.8 cu III.

Exemplu 3.4 [180]. Sistemul din fig. 3.9 este un turn plan alcătuit din 47 bare. Turnul a fost proiectat pentru 3 condiții de încărcare date în tabelul 3.1. Barele sînt de secțiune tubulară, cu raportul dimensiunilor $\frac{D}{t}=10$. Ca puncte fixe se păstrează 15, 16, 17 și 22, unde se află aplicată și încărcarea.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 3.1.

Nod	Încărcarea aplicată, în KN					
	Cond. încărcării 1		Cond. încărcării 2		Cond. încărcării 3	
	17	22	11	22	11	22
F_x	26,7	0	0	26,7	26,7	26,7
F_y	−62,3	0	0	−62,3	62,3	62,3

Fazele principale de modificare geometrică prin care trece structura sînt arătate tot în fig. 3.9, coordonatele finale ale nodurilor fiind cele din tabelul 3.2.

Tabelul 3.2.

NOD	Coordonate finale, în m					
	Caz 1		Caz 2		Caz 3	
	x	y	x	y	x	y
2	2,159	0	2,162	0	2,162	0
4	1,838	3,081	1,864	3,068	1,864	3,068
6	1,501	6,132	1,552	6,111	1,552	6,111
8	1,257	9,063	1,220	9,080	1,270	9,080
10	1,067	10,739	1,102	10,739	1,102	10,739
12	1,158	12,205	1,186	12,151	1,209	12,154
14	1,021	13,482	1,090	1,337	1,074	13,376
20	0,648	15.151	0,152	15,255	0	15,237
21	2,291	15,479	2,319	15,651	2,316	15,738

3.4.3. GREUTATEA SISTEMELOR CU MODEL ELASTO-PLASTIC

În cazul sistemelor cu comportare elasto-plastică (modelul C.D. $\alpha \neq 0$, $p = \infty$) supuse predominant la încovoiere, între configuraţia secţiunii transversale şi momentul plastic limită pentru o formă precizată a secţiunii există următoarea dependenţă:

Scanned with OKEN Scanner

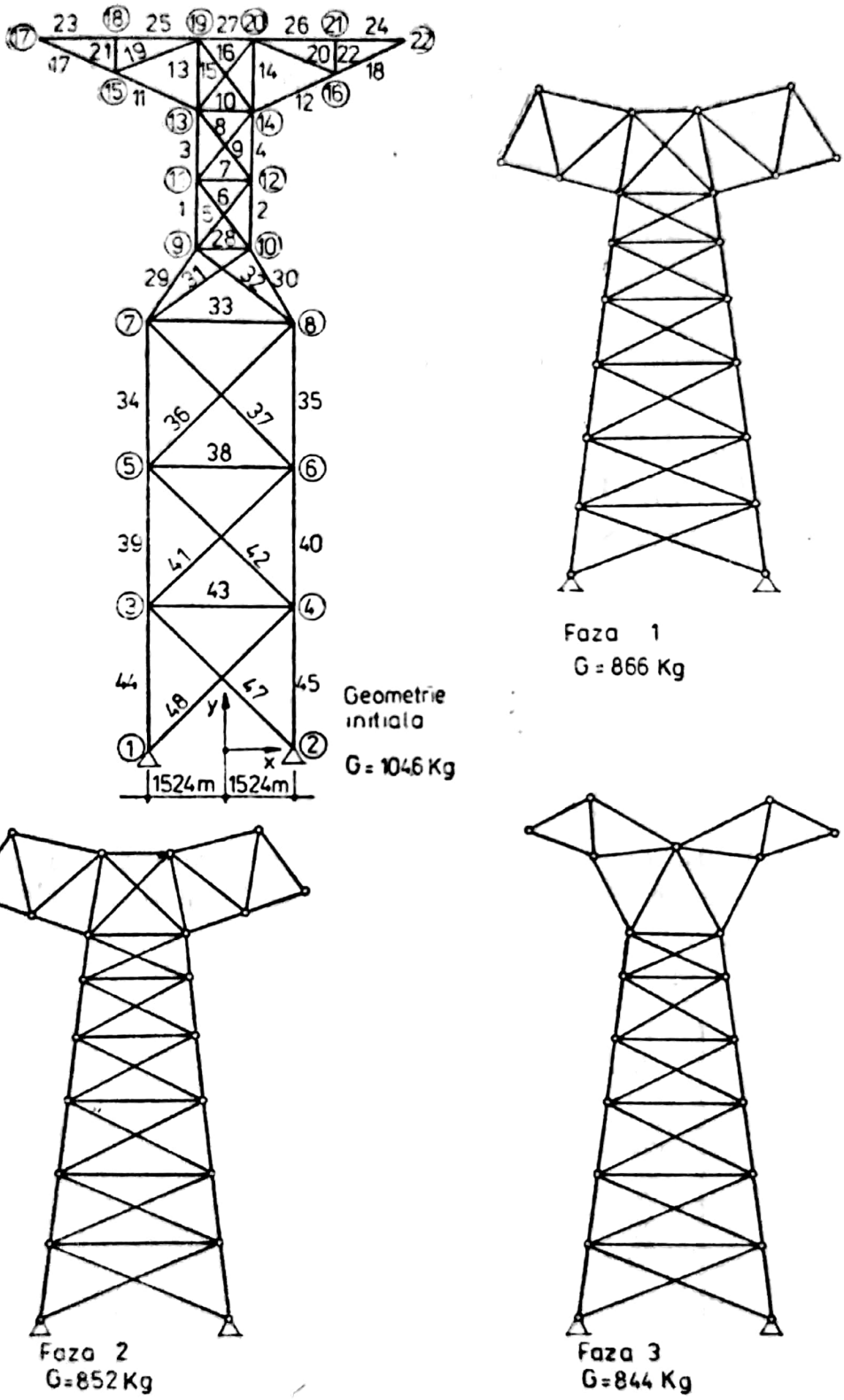


Fig. 3.9.

Scanned with OKEN Scanner

$M^{\lim}=Wpl\cdot\sigma_c$. Pe de altă parte, dependența dintre mărimea secțiunii transversale și caracteristica capacității portante a unui element i se poate exprima cu relația

$$A_i=a+b\,(M_i^{\lim})^{\alpha i}, \tag{3.108}$$

unde a, b sînt factori constanți, iar α_i depinde de forma secțiunii transversale ($\alpha_i=0{,}5$ pentru secțiunea dreptunghiulară cu lățimea constantă și $\alpha_i=0{,}582$ pentru secțiunea dublu T).

Expresia greutății sistemului se scrie

$$G=\gamma\,\Sigma\,[a+b\,(M_i^{\lim})^{\alpha i}]\,l_i=a\gamma\sum_{(i)}l_i+\gamma b\sum_{(i)}(M_i^{\lim})^{\alpha i}l_i. \tag{3.109}$$

Fie $\mathcal{S}$ un sistem de bare alcătuit din n elemente și supus la încărcările P_j; $j=\overline{1,\ p}$.

Definiția 3.10. Se numește sistem cu greutate minimă cu model elasto-plastic sistemul extremal

$$G\to min \tag{3.110}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{condițiile de echilibru}\\ \text{ale mecanismelor de}\\ \text{cedare plastică.}\end{array}\right.$$

Cazul 1. $0<\alpha_i<1$. Conform definiției și supozițiilor de mai sus pentru o schemă geometrică dată, alăctuită din n elemente și supusă încărcărilor P_j; $j=\overline{1,\ p}$ se poate scrie următorul model matematic [35]:

$$\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{n} l_iM_i^{\alpha_i}\to min\\ \text{cu restricțiile}\\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}M_i-\sum\limits_{k}^{p}\delta_{jk}P_j\geqslant 0,\quad j=\overline{1,\ m}\\ M_i\geqslant 0\\ a_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{p}a_{ji}^{k},\end{array}\right. \tag{3.111}$$

Scanned with OKEN Scanner

a_{ij}^{k} fiind coeficientul rotirii din punctul k în mecanismul j corespunzător momentului plastic capabil M_{i}, δ_{jk} este deplasarea pe direcția forței P_k în mecanismul j.

Cazul 2. $\alpha_i = 1$. Funcția de greutate se particularizează la forma

$$G = \sum_{r=1}^{n} M_r^{\lim} l_r. \tag{3.112}$$

La sistemul $\mathcal{S}$ alcătuit din s elemente, fie $\mathcal{S}^r$ un element al său la care se disting n_r secțiuni periculoase. Fie $\theta_{r\lambda}$ viteza de deformație plastică în secțiunea λ.

Definiția 3.11. Se va numi viteza redusă a deformației plastice pentru elementul $\mathcal{S}^r$ expresia:

$$\eta_r = \sum_{\lambda=1}^{n_r} |\theta_{r\lambda}| = \begin{cases} \sum \theta_{r\lambda}, & \text{dacă } \theta_{r\lambda} > 0 \\ -\sum \theta_{r\lambda}, & \text{dacă } \theta_{r\lambda} < 0. \end{cases} \tag{3.113}$$

Aceasta permite exprimarea vitezei de disipare a energiei sistemului prin intermediul relației

$$\sum_{r=1}^{s} M_r^{\lim} \eta_r. \tag{3.114}$$

Minimizarea expresiei vitezei de disipare este posibilă față de oricare valori fixate ale vitezei reduse a deformației plastice $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s)$. Dacă această corelație coincide cu rapoartele lungimilor elementelor componente ale sistemului $l_1, l_2, \ldots, l_s$, atunci viteza de disipare a energiei coincide cu expresia liniarizată a greutății sistemului cu o precizie pînă la un factor constant (a coeficientului proporționalității). Acest factor de obicei se accepta egal cu unitatea și forma linearizată are expresia (3.112).

Pentru $\eta_r = b_r$, $(r = \overline{1, s})$, în [35] se dau următoarele formulări ale sistemului extremal de greutate minimă cu model elasto-plastic.

a) **Distrugere plastică simplă** (formulare directă — formularea statică)

$$\sum l_r M_r^{\lim} \to min, \tag{3.115}$$

cu restricțiile privind cîmpul admis al eforturilor

$$\begin{cases} M_r^{\lim} - M_{r\lambda} \geqslant 0, & \lambda = \overline{1, n_r} \\ M_r^{\lim} + M_{r\lambda} \geqslant 0, & r = \overline{1, s}, \end{cases} \tag{3.116}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi cîmpul eforturilor static posibile

$$\sum_{r=1}^{s} \sum_{\lambda=1}^{n_r} a_{\lambda j}^{r} M_{r\lambda} = P_j, \quad j=\overline{1, n-k}, \tag{3.117}$$

$$M_r^{\lim} \geqslant 0, \quad r=\overline{1, s},$$

k — gradul de nedeterminare statică.

Notînd cu $i=\lambda+\sum_{q=1}^{r-1} n_q$ şi $M_{r\lambda}=M_i$, $a_{\lambda j}^{r}=a_{ij}$,

modelul se scrie

$$\sum_{r=1}^{s} l_r M_r^{\lim} \to min, \tag{3.118}$$

cu restricţiile

$$\begin{cases} M_r^{\lim} - M_i \geqslant 0 \\ M_r^{\lim} + M_i \geqslant 0 \end{cases}, \quad i=1, n, \tag{3.119}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} M_i = P_j, \quad j=\overline{1, n-k} \tag{3.120}$$

$$M_r^{\lim} \geqslant 0, \quad r=\overline{1, s}.$$

Scrierea matricei ecuaţiilor de echilibru se practică sub forma

$$A=[a_{ij}]=A'-A'', \tag{3.21}$$

cu respectarea condiţiilor de nenegativitate.

Folosirea teoremei de dualitate permite transcrierea modelului în formulare cinematică

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n-k} P_j V_j \to max \\ \sum_{\lambda=1}^{n_r} |\theta_{r\lambda}| \leqslant l_r; \quad r=\overline{1, s} & \text{cîmpul admis al vitezelor de deformare,} \\ \theta_{r\lambda} = \sum_{j=1}^{n-k} a_{\lambda j}^{r} V_j; \quad r=\overline{1, s} & \text{cîmpul cinematic al vitezelor de deformare,} \end{cases} \tag{3.122}$$

Scanned with OKEN Scanner

V_j viteza de deplasare a încărcării P_j.

Propunînd scrierea : $\theta_r = \theta'_r - \theta''_r$; $i = \lambda + \sum_{q=1}^{r-1} n_q$, se obține modelul operant în formularea cinematică

$$
(3.123) \quad \begin{cases}
\sum_{j=1}^{n-k} P_j V_j \to max \\
\sum_{\lambda=1}^{n_r} \theta'_{r\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{n_r} \theta''_{r\lambda} \leqslant lr, \quad r = \overline{1, s}, \\
-\theta'_i + \theta''_i + \sum_{j=1}^{n-k} a_{ij} V_j = 0, \quad i = \overline{1, n} \\
\theta'_i \geqslant 0 \quad \theta''_i \geqslant 0, \quad i = 1, n.
\end{cases}
$$

Exemplul 3.5 [35]. Pentru cadrul și încărcarea din fig. 3.10, în tabelul 3.3 se prezintă formularea statică. Rîndurile 11 și 12 din acest tabel reprezintă două plane optime. Combinația lor liniară, dintre care și aceea notată în rîndul 13, va fi planul optim al problemei.

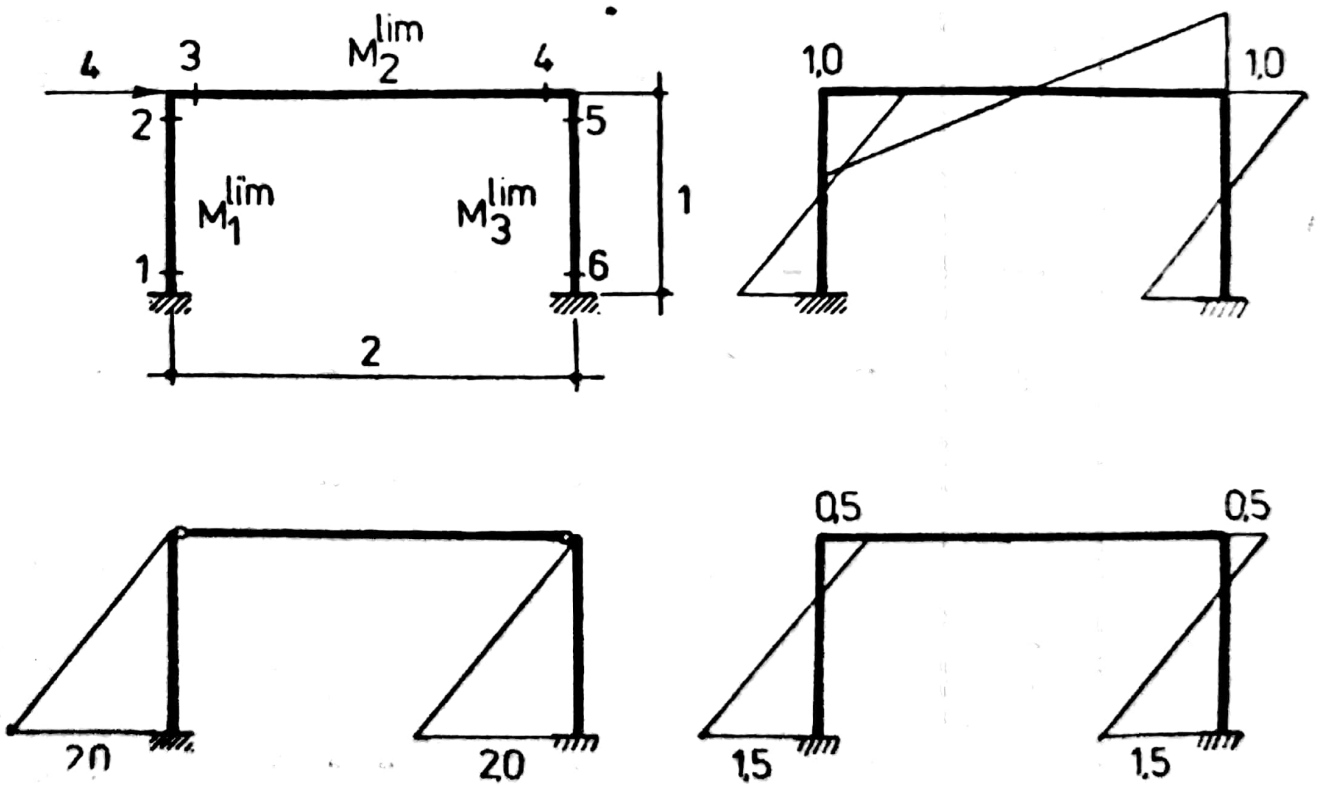


Fig. 3.10.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 3.3

	M_1^{lim}	M_2^{lim}	M_3^{lim}	a_1'	a_2'	a_3'	a_4'	a_5'	a_6'	a_1''	a_2''	a_3''	a_4''	a_5''	a_6''	
1	2			−1						−1						=0
2	2				−1						−1					=0
3		2				−1						−1				=0
4		2					−1						−1			=0
5			2					−1						−1		=0
6			2						−1						−1	=0
7	1	1			−1	−1										=0
8		1	1				−1	−1								=0
9	−2		−2	1	1			1	1							=4
10	1	2	1													*min*
11	1	1	1	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	*P*
																l
12	2	0	2	4	2	0	0	2	4	0	2	0	0	2	0	*a*
13	1,5	0,5	1,5	3	2	0	0	2	3	0	1	1	1	1	0	*n*

Scanned with OKEN Scanner

În tabelul 3.4 sînt notate condițiile formulării cinematice. Rîndul 8 al tabelului reprezintă planul problemei în formulare cinematică. După cum se vede, planul optim este degenerat.

Tabelul 3.4

	θ_1'	θ_2'	θ_3'	θ_4'	θ_5'	θ_6'	θ_1''	θ_2''	θ_3''	θ_4''	θ_5''	θ_6''	
(1)	1	1					1	1					=1
(2)			1	1					1	1			=2
(3)					1	1					1	1	=1
(4)	−1	1	−1				1	−1	1				=0
(5)		1	−1	1	−1			−1	1	−1	1		=0
(6)		1	−1			−1		−1	1			1	=0
(7)		−4	4					4	−4				*max*
(8)			1				1					1	plan

b) Distrugrea plastică ciclică

Se evidențiază la următorul sistem extremal în formulare directă (statică)

$$\sum_{r=1}^{s} l_r M_r^{\lim} \to min \tag{3.124}$$

$$-M_r^{\lim} - M_{r\lambda}^{min} \leqslant m_{r\lambda} \leqslant M_r^{\lim} - M_{r\lambda}^{max}, \tag{3.125}$$

cîmpul admisibil

$$\lambda = \overline{1, n}; \quad r = \overline{1, s}, \quad j = \overline{1, \quad n-k}$$

$$\sum_{r=1}^{s} \sum_{\lambda=1}^{n_r} a_{\lambda j}^2 m_{r\lambda} = 0, \tag{3.126}$$

cîmpul static posibil

$$M_r^{\lim} \geqslant 0, \quad r = \overline{1, s},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde : $m_{r\lambda}$ este momentul rezidual în secţiunea λ, iar $M^{max}=M^{+}$ şi $M^{min}=M^{-}$ în baza unei convenţii de semne aleasă pentru momentul încovoietor.

Cu notaţiile practicate mai înainte, modelul devine:

$$
(3.127)\qquad \begin{cases}
\sum\limits_{r=1}^{s} l_r M_r^{lim} \to min \\
\left.\begin{array}{l} M_r^{lim} - m_i \geqslant M_i^{+} \\ M_r^{lim} + m_i \geqslant -M_i^{-} \end{array}\right\} i=\overline{1,\ n} \\
\sum a_{ij} m_i = 0, \qquad j=\overline{1,\ n-k} \\
M_r^{lim} \geqslant 0, \qquad r=\overline{1,\ s},
\end{cases}
$$

m_i — efortul remanent în secţiunea i.

Formularea duală a sistemului extremal primeşte exprimarea

$$
(3.128)\qquad \begin{cases}
\sum\limits_{i=1}^{n} M_i^{+}\theta_i' - \sum\limits_{i=1}^{n} M_i^{-}\theta_i'' \to max \\
\sum\limits_{\lambda=1}^{n_r} \theta_{r\lambda}'' + \sum\limits_{\lambda=1}^{n_r} \theta_{r\lambda}'' \leqslant l_r, \quad r=\overline{1,\ s} \\
-\theta_i' + \theta_i'' + \sum\limits_{j=1}^{n-k} a_{ij} V_j = 0, \quad i=\overline{1,\ n} \\
\theta_i' \geqslant 0\ ; \qquad \theta_i'' \geqslant 0, \qquad i=\overline{1,\ n}.
\end{cases}
$$

3.5. SISTEME EXTREMALE AVÎND SIGURANŢA IMPUSĂ

3.5.1. SIGURANŢA UNUI SISTEM

Dacă o construcţie este realizată din N elemente astfel că ieşirea din funcţiune a unui singur element compromite toată construcţia, iar cedarea unui element nu depinde de cedarea altuia (cazul struc-

Scanned with OKEN Scanner

turilor static determinate), siguranța construcției este o funcție de probabilitatea de cedare a fiecărui element, notată cu P_k. Probabilitatea de cedare a întregii structuri se scrie

$$P = \prod_{k=1}^{N} P_k. \tag{3.129}$$

Probabilitatea de cedare a fiecărui element P_k se determină din condiția ca solicitarea elementului S_k să rămînă peste nivelul capacității portante R_k a elementului

$$P_k = P\,(R_k - S_k \leqslant 0). \tag{3.130}$$

Pentru unele elemente de construcții se dau probabilitățile de cedare în anumite ipoteze: forma elementului, locul lui în construcție [78]. Weibull propune legi extremale pentru funcțiile de densitate probabilistică de cedare, după caracterul ruperii materialului ductil ori casant [21].

În sfîrșit, se folosesc distribuții normale atît pentru încărcări, cît și pentru rezistențe în care caz se poate scrie:

$$P_k = P\,(R_k - S_k \leqslant 0) = \int d_{R_k - S_k}(x)\,dx = \tag{3.131}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_{R_k - S_k}} \int_{-\infty}^{0} exp.\ -\frac{(x - m_{R_k - S_k})^2}{2\sigma^2_{R_k - S_k}}\,dx,$$

unde $d_{R_k - S_k}$ este funcția de densitate probabilistică a diferenței $R_k - S_k$ și $m_{R_k - S_k}$, $\sigma_{R_k - S_k}$ sînt media, respectiv abaterea aceleiași variabile aleatoare.

Normalizarea variabilei aleatoare

$$\xi = \frac{x - m_{R_k - S_k}}{\sigma_{R_k - S_k}}, \tag{3.132}$$

conduce la probabilitatea de cedare a elementului k sub forma

$$P_k = \int_{\frac{1}{V_{R_k - S_k}}}^{\infty} exp.\ -\frac{\xi^2}{2}\,d\xi, \tag{3.133}$$

unde $V_{R_k - S_k}$ reprezintă coeficientul de variație a variabilei aleatoare $R_k - S_k$ și se exprimă prin

$$V_{R-S} = \frac{\sigma_{R-S}}{m_{R-S}} = \frac{1}{m_R - m_S}\sqrt{m_R^2 V_R^2 + m_S^2 V_S^2} = \frac{1}{C-1}\sqrt{C^2 V_R^2 + V_S^2}. \tag{1.134}$$

$C = m_R/m_S$ se numește coeficient de siguranță al elementului k.

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienții de variație V_R, V_S pot fi calculați fără dificultate [21], iar în [82] se dau diagrame care permit extragerea directă a lui P_f funcție de V_R, V_S și C.

Prin urmare, relația (3.136) poate fi calculată pentru fiecare element în parte, ceea ce permite efectuarea relației (3.129).

Analiza lui (3.129) evidențiază faptul că siguranța unei construcții static determinate scade cu creșterea numărului de elemente componente și cu reducerea probabilității de cedare a unui element. La o structură static determinată, toate elementele au aceeași importanță din punct de vedere al proiectării și execuției.

Pentru structurile static nedeterminate, calculul siguranței în exploatare are în vedere faptul că ieșirea din funcțiune a unui element nu duce la capotarea structurii, ci la o redistribuire a solicitărilor. Așadar, cedarea unui element este condiționată de cedarea altui element.

Din punctul de vedere al siguranței, structurile static determinate sînt sisteme serie. iar cel static nedeterminate sînt sisteme cu elemente dependente.

3.5.2. SISTEME CU GREUTATE MINIMĂ ȘI SIGURANȚĂ IMPUSĂ

Se consideră o structură static determinată alcătuită din N elemente cu g_k greutatea specifică a elementului k, iar $g_k l_k$ greutatea toală a elementului și $\Sigma\, g_k l_k$ a greutății construcției. În continuare se trece la minimizarea greutății construcției condiționat de siguranța de exploatare, care nu trebuie să coboare sub o anumită valoare.

Așadar, se caută

$$\Sigma\, g_k l_k \rightarrow min, \tag{3.135}$$

cu condiția

$$S_N = \prod_1^N S_k\,(l_k) \geqslant S. \tag{3.136}$$

Dacă construcția ar fi alcătuită dintr-un singur element $N=1$, atunci pentru buna funcționare ar trebui ca

$$S_1 = S_1\,(l_1) \geqslant S,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci greutatea construcției ar fi

$$G_1(S) = g_1 l_1.$$

Pentru o structură din două elemente $N=2$

(3.137) $$S_2 = S_1(l_1) \cdot S_2(l_2) \geqslant S,$$

de unde

$$S_1(l_1) = \frac{S}{S_2(l_2)}.$$

Greutatea construcției devine

(3.138) $$G_2(S) = \min_{l_2} \left(g_2 l_2 + S_1\left(\frac{S}{S_2(l_2)}\right)\right).$$

În cazul general al construcției alcătuite din N elemente, modelul matematic se scrie

(3.139) $$G_N(S) = \min_{l_N} \left(g_N l_N + G_{N-1}\left(\frac{S}{S_N(l_N)}\right)\right),$$

în condiția

(3.140) $$\prod_1^N S_k(l_k) \geqslant S.$$

Modelul matematic obținut corespunde unui sistem extremal secvențial.

3.5.3. SIGURANȚA UNUI SISTEM CU GREUTATE ȘI PREȚ DE COST LIMITAT

Problema din paragraful anterior poate fi privită și sub un alt aspect. Anume, care este siguranța de exploatare a unei construcții cînd se limitează greutatea ei totală G și prețul său de cost c.

Fie G_N greutatea totală a construcției. Dacă l_N este lungimea și g_N greutatea specifică a elementului al N-lea, atunci greutatea celor $N-1$ elemente se scrie

(3.141) $$G_N - l_N g_N = G_{N-1},$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $C_N(l_N)$ este costul elementului al N-lea, iar C_N este costul întregii construcţii, atunci nivelul cheltuielilor în afara elementului al N-lea se scrie

$$C_N - C_N(l_N) = C_{N-1}. \tag{3.142}$$

Modelul problemei este următorul:

$$\prod_{k=1}^{N} S_k(l_k) \to max, \tag{3.143}$$

în condiţiile

$$\begin{cases} G_N \leqslant G \\ C_N \leqslant C \\ l_k > 0. \end{cases} \tag{3.144}$$

Fiindcă parametru l_k condiţionează atît greutatea cît şi costul siguranţa construcţiei se poate scrie ca o funcţie de cost şi greutate

$$S_N(G_N, C_N) = \max \prod_{1}^{N} S_k(l_k). \tag{3.145}$$

Conform principiului optimalităţii, o strategie optimă indiferent de starea şi decizia iniţială se compune dintr-un set de decizii optime în raport cu starea care rezultă din prima decizie. Deci:

$$S_N(G_N, C_N) = \max_{l_N} S_N(l_N) \cdot S_{N-1}(G_{N-1}, l_{N-1}). \tag{3.146}$$

Trecerea de la 2 variabile la una singură se face prin intermediul multiplicatorului lagrangean. Se construieşte funcţia

$$h_N(C_N) = max \prod_{k=1}^{N} S_N(A_N) \, exp \, (-\lambda g_N l_N), \tag{3.147}$$

în care parametrul λ se determină din condiţia

$$\Sigma \, g_k l_k = \lambda. \tag{3.148}$$

Problema se reduce la sistemul extremal secvenţial, a cărui formulare se poate face astfel:

$$h_N(C_N) = [S_N(l_N) \, exp \, (-\lambda g_N h_{N-1}(C_N)] \to max, \tag{3.149}$$

în condiţiile

$$G_N \leqslant G; \; C_N \leqslant C; \; \Sigma \, g_k l_k = \lambda \qquad l_k > 0 \tag{3.150}$$

Găsirea mărimilor l_k permite calculul siguranţei $S_k(l_k)$ a fiecărui element şi în final siguranţa de funcţionare a structurii [87].

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV

PROIECTARE OPTIMALĂ

4.1. NOŢIUNI FUNDAMENTALE

Problema proiectării înseamnă aplicarea creatoare a ştiinţelor tehnice la evoluţia unor produse finite utile. Esenţa proiectării constă în capacitatea ei de a fi creatoare şi aplicabilă.

Elaborarea proiectului unei construcţii este o activitate responsabilă de sume şi valori imense angajate în procesul de edificare.

Găsirea unor proiecte optime ale structurilor de construcţii este mult mai complicată decît activitatea tradiţională de calcul şi verificare a elementelor de construcţii.

Experienţa arată că în proiectarea de rutină a celor mai simple construcţii (exemplu, plăci, grinzi din beton armat), devierea medie de la soluţia optimă se cifrează la 5—7%, iar pentru elemente mai pretenţioase (exemplu, grinzi precomprimate) 10—12% şi pentru subansamble (cadre, plăci plane, plăci curbe) 30—40%.

Procedeul alegerii variantelor (cernerea soluţiilor) nu asigură succesul activităţii de optimizare, deoarece numărul variantelor posibile chiar dacă este finit, adeseori este atît de mare încît obligă la abandonarea ideii. Pe de altă parte, compararea a 2—3 variante din care se alege cea mai bună conduce numai la dezorientare, întrucît probabilitatea ca printre variante să se găsească soluţia optimă este extrem de mică. De aceea, căutarea DIRIJATĂ a soluţiei optime bazată pe analiza unui număr limitat de variante posibile

Scanned with OKEN Scanner

într-un anumit mod este în prezent unicul procedeu pentru admiterea soluției optime sau apropiat de ea. Metoda sistemelor extremale permite organizarea unei astfel de căutări. Aceasta este explicația pentru folosirea tot mai frecventă în ultimii ani a unor modele de sisteme extremale pentru elaborarea proiectelor și normelor de proiectare.

Folosirea sistemelor extremale conduce la reducerea cheltuielilor de proiectare, dar nu într-o măsură apreciabilă față de costul construcției. Aportul economic major în urma proiectării optimale se concretizează în reducerea consumurilor de materiale, reducerea volumului fundațiilor și a lucrărilor de fundații, diminuarea volumului transporturilor și a materialelor de manipulat, reducerea cantității de manoperă, reducerea timpului de edificare etc.

4.2. PROIECTAREA CONSTRUCȚIILOR

Elementele procesului de proiectare sînt :

1. variabilele de proiectare,
2. mulțimea criteriilor de proiectare,
3. mulțimea variantelor posibile,
4. mulțimea consecințelor anticipate pentru fiecare variantă luată în considerare.

Fazele proiectării pot fi descrise de următoarea organigramă :

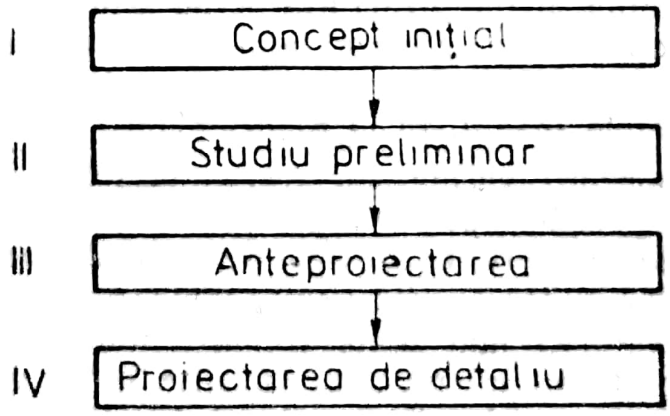


Fig. 4.1.

Scanned with OKEN Scanner

Etapele I și II sînt patronate de beneficiarul lucrării care își propune să destine construcția unui anumit scop funcțional.

III. Anteproiectare

Operațiile anteproiectării constau în analiza următoarelor aspecte: valorile de sistem, conceptul de proiectare, informațiile necesare proiectării, care se prezintă detaliat în schema de mai jos:

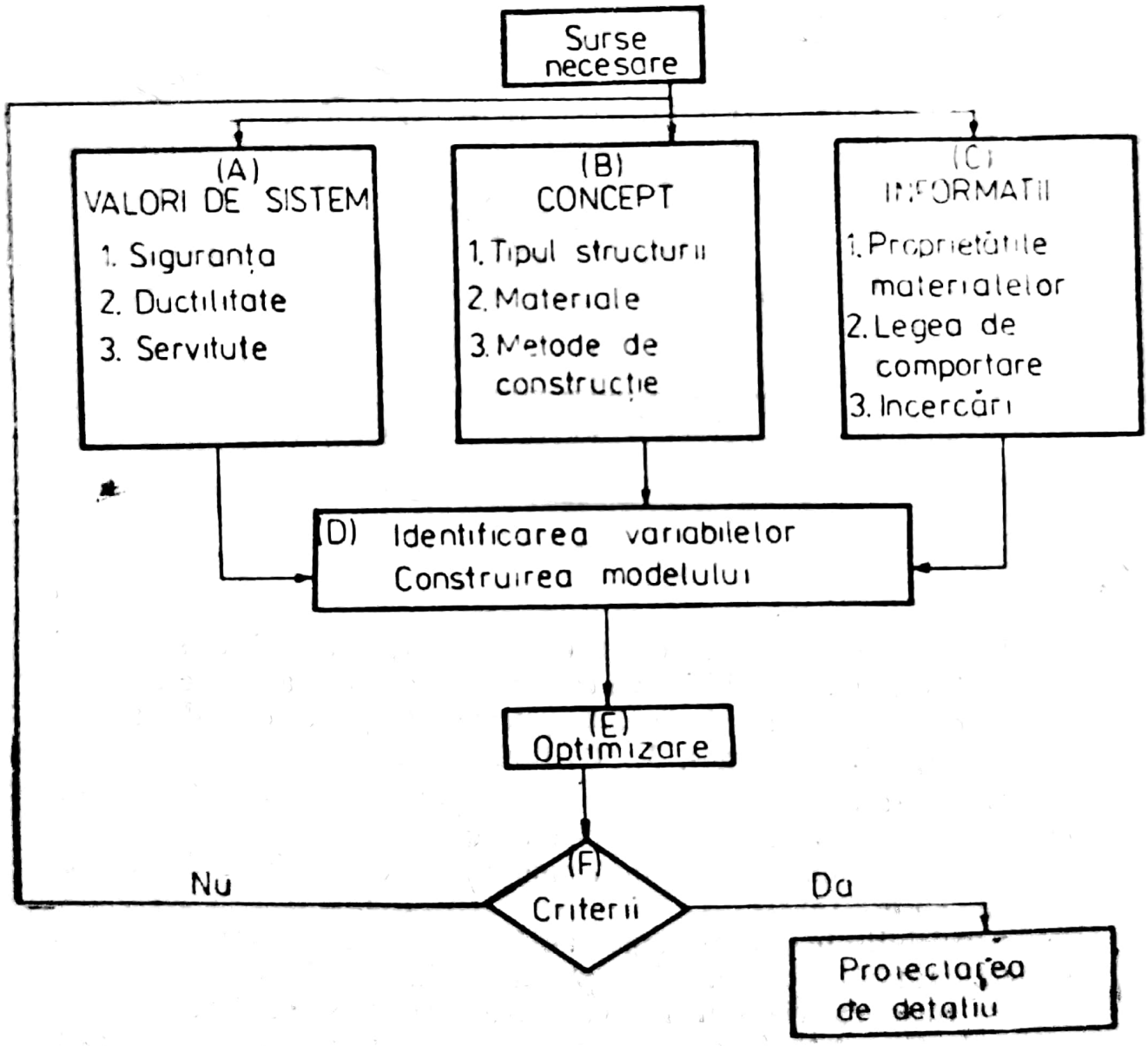


Fig. 4.2.

Scanned with OKEN Scanner

A. *Valorile de sistem* vor trebuie dezvoltate pentru situaţia particulară precizată în tema de proiectare.

Asemenea valori sînt atribuite la structurile la care aceste mărimi pot fi măsurate.

Siguranţa, serviabilitatea, ductilitatea sînt valori inginereşti (fig. 4.3).

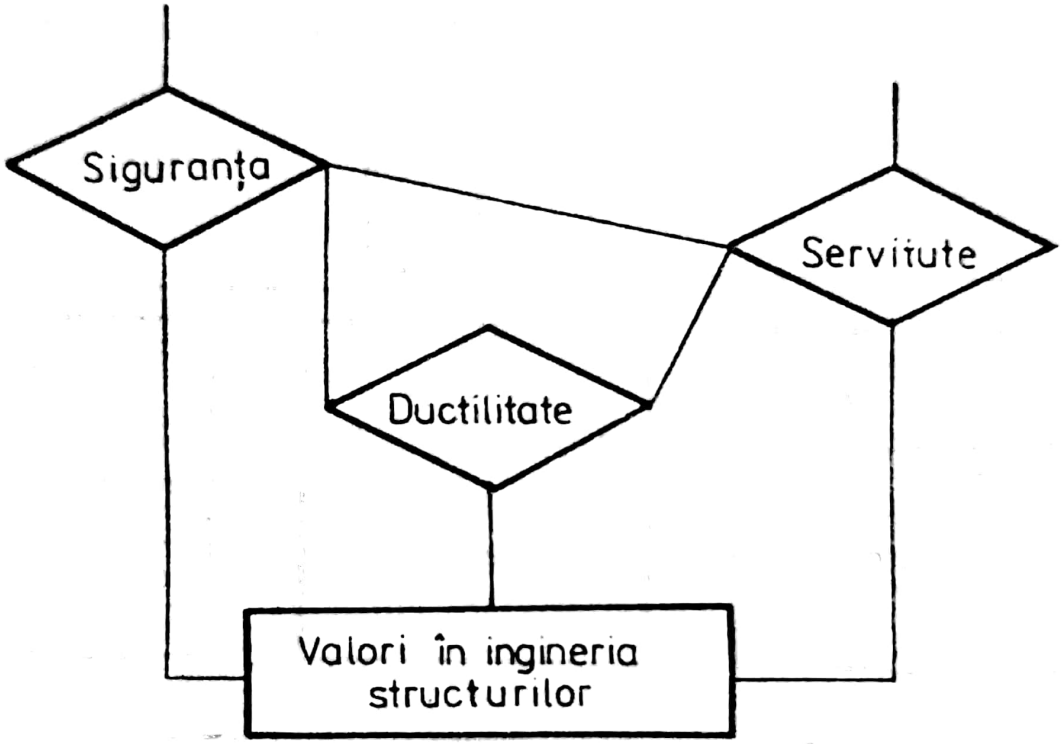


Fig. 4.3.

Proiectarea unei structuri de rezistenţă, avînd o siguranţă precizată este responsabilitatea cea mai importantă a proiectantului. Pentru detalii istorice şi concret aplicabile se poate consulta monografia a lui J. F. Borges, M. Costanheta [21].

Ductilitatea este o proprietate importantă a structurilor de care trebuie să ţină seamă proiectantul.

Această proprietate implică modul de cedare, viteza de cedare, energia absorbită etc.

Serviabilitatea, deşi importantă este numai parţial în grija proiectantului — aceasta fiind precizată în standarde.

Pe lîngă valorile din ingineria structurilor există şi valori arhitecturale (fig. 4.4) de care se ţine seama la întocmirea proiectului construcţiei.

Scanned with OKEN Scanner

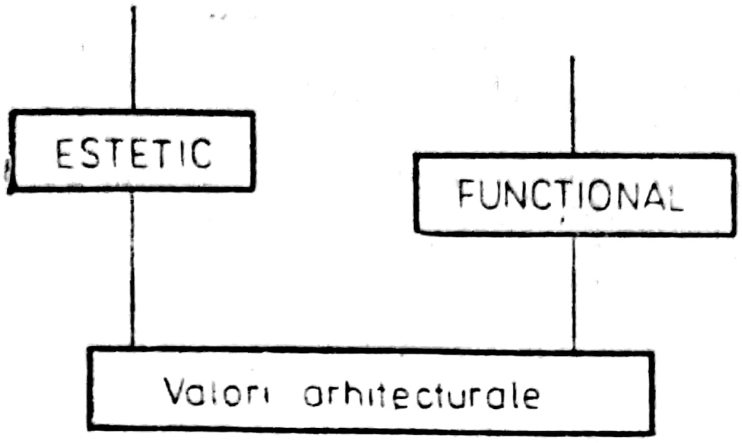


Fig. 4.4.

B. *Concept.* Avîndu-se în vedere complexitatea problemei, mulțimea punctelor de vedere care se declină din aceasta obligă filtrarea variantelor posibile prin intermediul unor criterii. Importanța și semnificația acestor criterii de obicei este foarte diferită. Aceste criterii nu întotdeauna pot fi descrise analitic în raport cu variabilele de proiectare (nedepășirea termenului de livrare, calitate cît mai bună, posibilitate estetică etc.). Prin urmare este necesară modelarea acestei etape.

Pentru fixarea ideilor se notează cu $V=\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ mulțimea variantelor luate în considerare de către proiectant și $C=\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ mulțimea criteriilor sau a punctelor de vedere ale proiectantului.

Analiza elementului V_i, de exemplu, din punctul de vedere C_j va conduce la un rezultat notat prin a_{ij}.

Pentru a putea compara valorile a_{ij}, se vor normaliza la o anumită scară [24].

Compararea elementelor lui V în raport cu elementele lui C se poate realiza dacă pe V se poate defini o relație de ordine cu ajutorul elementelor lui C. Acest lucru a fost realizat de un grup de cercetători de la „SEMA" [24] în modul următor :

1. Asocierea fiecărui criteriu C_j a unui graf, $G_j=(V, U_j)$, unde vîrfurile grafului vor fi elementele mulțimii V. Două vîrfuri, de exemplu, V_j și V_i sînt legate printr-un arc orientat de la V_j la V_i, dacă V_i depășește pe V_j în ordonarea după criteriul C_i. Dacă vîrfurile sînt echivalente, se vor trasa două arce.

Observația 4.1. Se poate constata ușor că acest graf are următoarele proprietăți : este tranzitiv și complet.

Scanned with OKEN Scanner

2. Sintetizarea rezultatelor comparației de la etapa 1 printr-o ordonare totală cu ajutorul grafului sinteză $G_s=(V, U_s)$.

În cadrul acestui graf vor putea fi de exemplu: arc de la V_j la V_i, dacă și numai dacă există acest arc în toate grafele G_j; $j=\overline{1, n}$. Ordonarea completă cu ajutorul acestui graf se face folosind următorii indicatori:

a) Indicatorul de concordanță între V_j și V_i

$$c(V_j, V_i)=\frac{1}{k_1+k_2+\ldots+k_m}\sum_j k_j, \tag{4.1}$$

unde indicii k_i, $i=\overline{1, n}$ sînt coeficienți de importanță a criteriilor considerate, iar suma se face după acei indici g pentru care $a_{jg}\geqslant a_{ig}$.

b) Indicatorul de discordanță

$$d(V_g, V_h)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } a_{\ j}<a_{hi}, \quad \forall j=\overline{1, n} \\ \frac{1}{d}\,max\,|\,a_{gj}-a_{hj}\,| & \\ \text{maximul luîndu-se pentru acei } j & \\ \text{pentru care } a_{hj}\geqslant a_{gj}. & \end{cases} \tag{4.2}$$

Cu ajutorul acestor indicatori se va introdce în V următoarea relație de surclasare: V_i surclasează V_k dacă $c(V_i, V_k)\geqslant p$ și $d(V_i, V_k)\leqslant q$, unde p și q sînt două valori prag (cuprinse între 0 și 1) alese de proiectant. În felul acesta, pentru fiecare pereche (p, q) se construiește graful $G(p, q)=(V, U(p, q))$, în care $[(V_i, V_k)\in U(p, q)] \Leftrightarrow [c(V_i, V_k)\geqslant p$ și $d(V_i, V_k)\leqslant q]$.

În urma acestui procedeu proiectantul ajunge la varianta optimă a punctelor sale de vedere, conturînd tipul structurii de rezistență, materialele și metodele de construcție.

C. *Informațiile* necesare proiectării sînt de o importanță deosebită în formularea modelelor extremale, care constituie reprezentări ale realității. Culegerea informațiilor se face din diferite domenii care cooperează la realizarea construcției, fig. 4.5.

D. În fața proiectantului stau două obiective contrare:

a) modelul matematic trebuie să fie cît mai simplu de rezolvat,

b) modelul să reflecte cît mai fidel situația reală.

Astfel, construirea modelului trebuie să simplifice realitatea, dar numai pînă la un punct de la care începînd lipsa de precizie devine semnificativă.

Scanned with OKEN Scanner

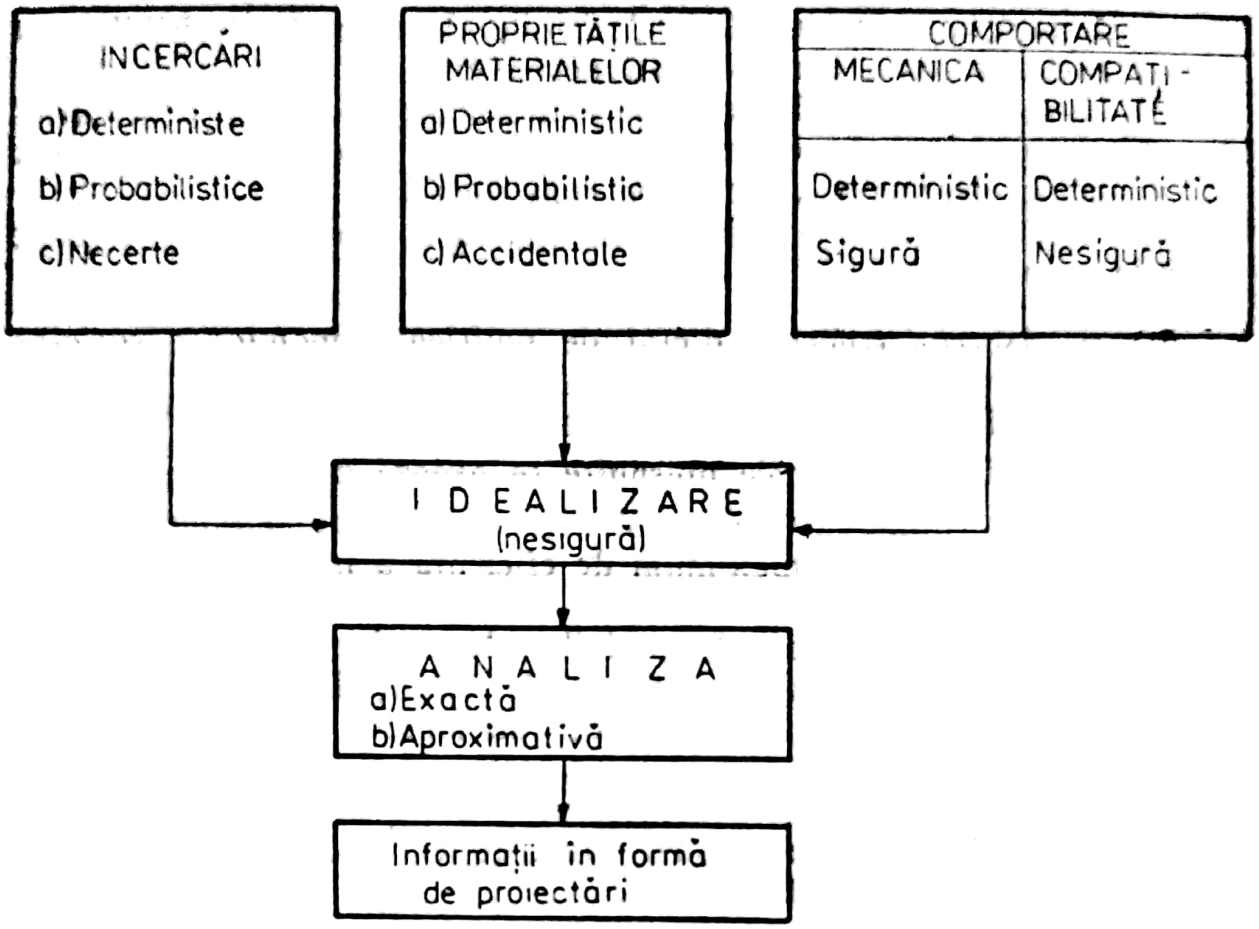


Fig. 4.5.

Oricare ar fi criteriile care se iau în considerare, activitatea de proiectare conduce la alegerea unor valori pentru variabilele de proiectare. Variabilele de proiectare reprezintă un număr de mărimi prin intermediul cărora este descrisă configurația construcției.

Pentru tratarea matematică, variabilele de proiectare trebuie să aibă caracter de mulțime sau mărime. Mărimile de proiectare pot fi privite ca aparținînd unui spațiu euclidian cu n dimensiuni. Ca rezultat al proiectării, construcția se poate gîndi ca un punct sau un vector din acest spațiu, coordonatele lui fiind mărimi numerice atașate mărimilor de proiectare.

Variabilele de proiectare sînt supuse unor limite inferioare și superioare. Deoarece dimensiunile construcțiilor pot lua numai valori pozitive, limită inferioară a variabilelor de proiectare este valoarea zero. Limitele superioare se stabilesc de condițiile de exploatare și execuție etc. Mulțimea valorilor variabilelor de proiectare care respectă setul restricțiilor impuse de problemă deter-

Scanned with OKEN Scanner

mină mulțimea proiectelor admisibile. Domeniul admisibil poate avea configurația convexă sau neconvexă (cap. II).

La construirea domeniului admisibil își dau concursul următoarele domenii de cunoaștere: domeniul economic, știința construcțiilor inginerești, mecanica construcțiilor.

În felul acesta modelul problemei va fi analizat după următoarele aspecte:

I. *Aspectul economic* dictat de politica economică a societății la momentul respectiv; el constă în fixarea criteriilor economice ca element decizional în proiectare.

Criteriile decizionale obișnuite se axează pe:

a) determinarea unei construcții de greutate minimă,

b) utilizarea cu maximum de eficiență a materialului din care se realizează construcția,

c) construcția supusă sarcinilor de exploatare să acumuleze prin deformare un minim de energie potențială,

d) costul materialului, costul manoperei, costul proiectării, costul exploatării,

e) costul minim al construcției,

f) posibilitatea alcătuirii construcției din materiale diferite, oțel, beton armat, zidărie etc.

II. *Aspectul tehnic*. Din acest punct de vedere sînt discutate:

a) restricțiile privind securitatea și limitările constructive,

b) schema statică și natura elementelor: grinzi, ferme, arce, cadre, plăci etc.,

c) felul acțiunilor: încărcări statice, mobile, dinamice etc.,

d) distribuirea rațională a materialului în elementele de construcție pentru o alcătuire eficientă.

III. *Aspectul comportării fizice* a materialului din care se execută construcția. Acest aspect poate fi concretizat prin ecuațiile de stare, care pot fi scrise pentru comportarea materialului în domeniul elastic, elasto-plastic, plastic în funcție de idealizarea propusă de proiectant. Valoarea idealizării trebuie să fie judecată după felul în care reprezintă comportarea reală. Această valoare este în strînsă legătură cu mărimile elementelor de estimat și cu starea limită considerată.

E. *Optimizarea*. Rolul esențial al modelului admisibil alcătuit pentru o construcție este de a servi ca instrument în alegerea celei mai bune posibilități de realizare, din mulțimea celor „acoperite"

Scanned with OKEN Scanner

de model. Astfel, în munca proiectantului apare aspectul proiectării optime, adică de ordonare a mulțimii proiectelor admisibile în raport cu unul sau mai multe criterii.

F. *Criterii.* În cadrul proiectării optime a construcțiilor conținutul criteriului poate fi destul de variat, neexistînd criterii universale. Caracterul optim, asemenea „frumuseții", depinde de punctul de vedere adoptat. Construcțiile au o longevitate care depășește pe aceea a generației care le edifică, iar generațiile următoare își pot schimba aprecierile. În felul acesta apare clar dependența noțiunii proiectului optim de condițiile social-economice ale societății.

4.3. ROLUL CALCULATORULUI ELECTRONIC ÎN ACTIVITATEA DE PROIECTARE

Problemele proiectării construcțiilor pot fi clasificate în două categorii :

1. Probleme structurale, în care variabilele de proiectare sînt precizate, relațiile funcționale dintre ele sînt bine definite, fiind posibilă construirea modelului matematic. În această situație, după cum s-a evidențiat în capitolele anterioare, se poate întocmi sistemul extremal corespunzător problemei de proiectare.

Exemplul 4.1. Se consideră sistemul de bare din fig. 4.6. Elementele sînt bare tubulare din oțel, prinse articulat în punctul de

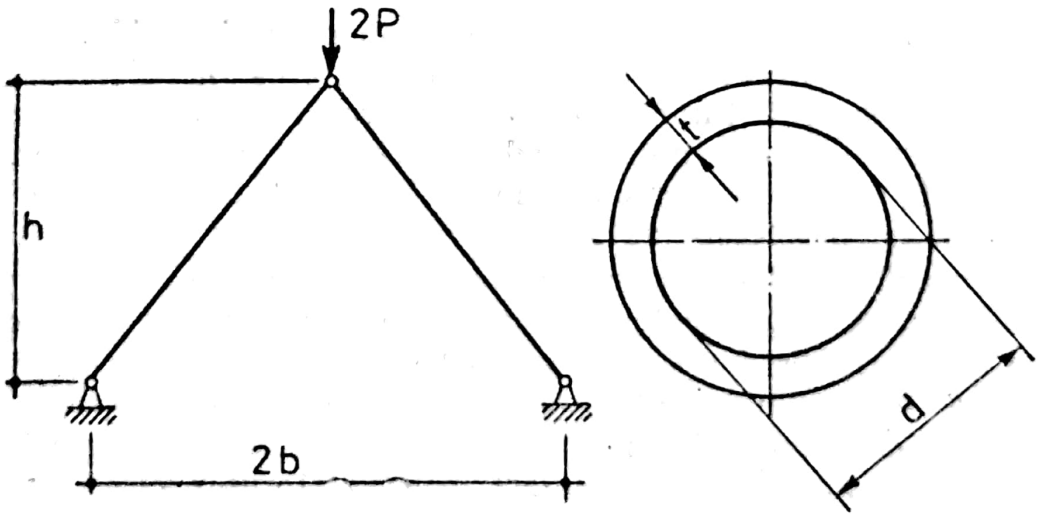


Fig. 4.6.

la cheie. Se presupune că grosimea peretelui ţevii este fixată la o valoare $\bar{t}$ şi că semideschiderea b este fixată la $\bar{b}$.

Problema proiectării constă în determinarea diametrului d al tuburilor şi înălţimii h pentru ca ansamblul să aibe greutatea minimă.

Modelul matematic

$$\min\ G = 2\pi\, d\bar{t}\rho\, (h^2+\bar{b}^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.3}$$

cu restricţiile

a) Stabilitatea Euler

$$\sigma_l = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} = \frac{\pi^2 E}{8} \cdot \frac{d^2+\bar{t}^2}{\bar{b}^2+h^2} \geqslant \sigma = \frac{P}{\pi\bar{t}} \cdot \frac{(\bar{b}^2+h^2)^{\frac{1}{2}}}{h\cdot d}. \tag{4.4}$$

b) Rezistenţă

$$\frac{P}{\pi t} \cdot \frac{(\bar{b}^2+h^2)^{\frac{1}{2}}}{d\cdot h} \leqslant \sigma_a. \tag{4.5}$$

2. Probleme nestructurale în care nu se pot defini analitic una sau mai multe relaţii funcţionale între variabilele de proiectare sau unele variabile de proiectare prezintă o comportare nesigură. Exemplu : sistemul extremal din bare cu model neliniar elastic.

Se pune întrebarea : care este rolul calculatorului electronic în activitatea de proiectare a construcţiilor ?

În cadrul problemelor structurale calculatorul preia direct şi complet întreaga muncă de proiectare prin intermediul algoritmului folosit de proiectant. Funcţie de algoritm calculatorul poate da un proiect admisibil (proiectarea tradiţională) sau un proiect optim (bazat pe teoria sistemelor extremale). Aceasta este cunoscută sub denumirea de proiectare automată.

În cazul problemelor nestructurale proiectantul se serveşte de posibilităţile largi ale tehnicii de calcul, calculatorul furnizează date cantitative pe baza cărora proiectantul ia decizii calitative. Aceasta este denumită proiectare cu ajutorul calculatorului.

În fig. 4.7 se descrie în mod simplificat procesul de proiectare pe cele două nivele de participare a calculatorului electronic la activitatea de proiectare în construcţii.

Scanned with OKEN Scanner

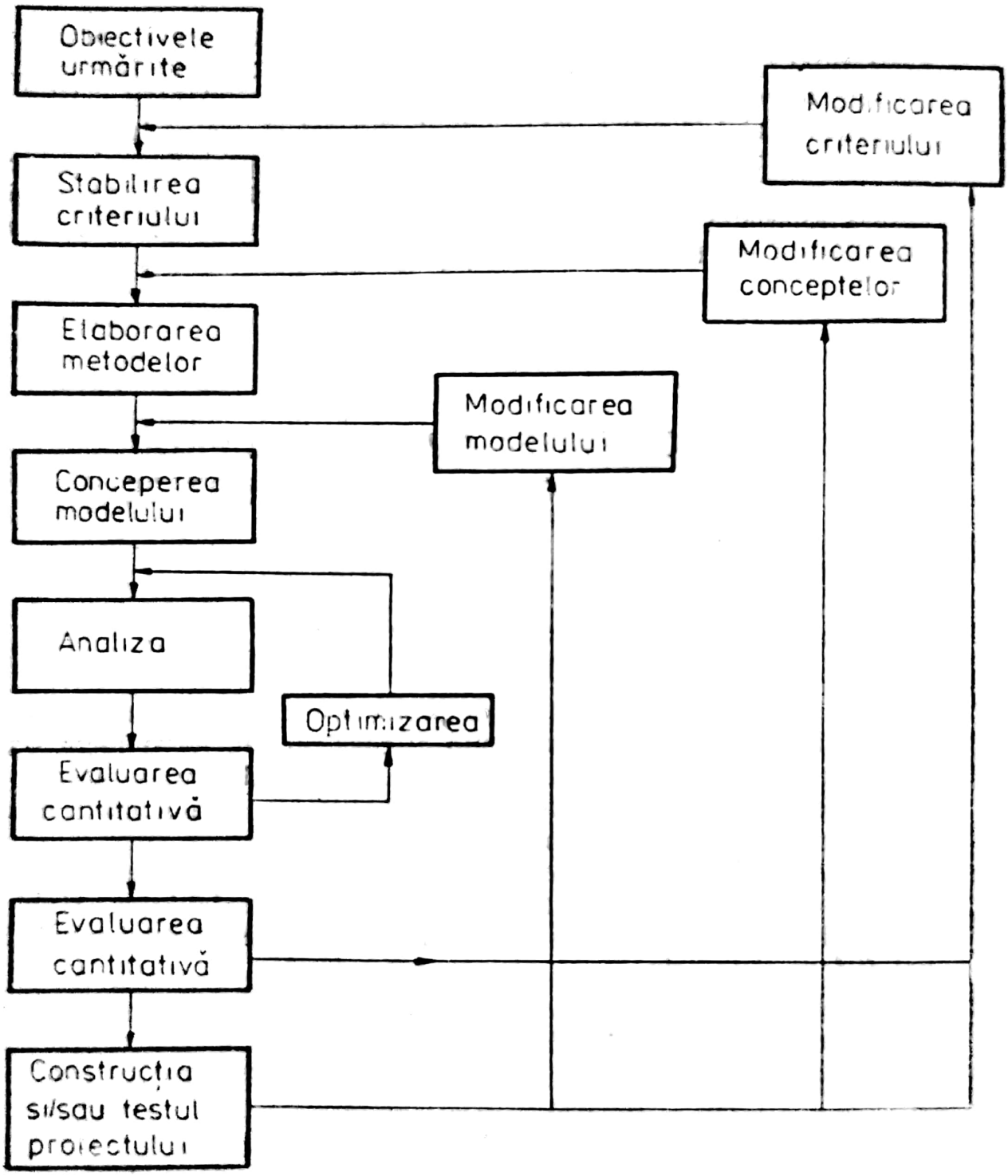


Fig. 4.7.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul sistemelor nestructurale apar mari dificultăţi în rezolvarea problemei. În acest context, de o eficienţă deosebită se dovedeşte tehnica simulării.

Simularea constituie singura cale posibilă de experimentare a proiectului la scară naturală, în comparaţie cu modele de laborator.

În activitatea de proiectare, tehnicianul proiectant constituie una din variabilele cele mai importante în proiectarea nestructurală. Deoarece comportarea lui nu poate fi modelată, proiectantul poate fi introdus în model pentru a determina efectele comportării lui asupra celorlalte variabile şi a performanţelor sistemului. Aceasta se realizează prin tehnica simulării şi poartă numele de joc operaţional.

4.4. PROIECTAREA OPTIMALĂ PE BAZA UNUI SINGUR CRITERIU DE OPTIMIZARE

4.4.1. GENERALITĂŢI

Etapa centrală a activităţii de proiectare o constituie realizarea proiectului scheletului de rezistenţă al construcţiei. Acest lucru s-a conturat la pct. B, fig. 4.1 din punct de vedere al tipului, materialelor, metodei de execuţie. Conform schemei, urmează identificarea variabilelor şi construirea modelului.

Construcţia portantă trebuie să corespundă unui set de condiţii sinergic-cooperante raportate la rezistenţa, deformabilitatea, stabilitatea, fisurarea scheletului şi a elementelor sale. Aceste condiţii pot fi formulate prin

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ \{\geqslant, =, \leqslant\} \ 0, \quad i=\overline{1, m}, \tag{4.6}$$

criteriul de proiectare putînd fi descris de

$$C(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow optim, \tag{4.7.}$$

unde x_i sînt variabile de proiectare.

Observaţia 4.2. În formularea de mai sus se recunoaşte cu uşurinţă că proiectul optim al scheletului portant al unei construcţii

Scanned with OKEN Scanner

bazat pe un singur criteriu este exprimat de un sistem extremal definit în capitolul II și concretizat în cap. III.

Observația 4.3. În raport cu proprietățile funcțiilor φ_i, C proiectul optim poate fi convex sau neconvex cu toate consecințele ce decurg din aceste însușiri (vezi cap. II).

Observația 4.4. După cum variabilele de proiectare aparțin sau nu unui cîmp de probabilitate, modelul proiectului poate fi deterministic sau stochastic.

Observația 4.5. În urma precizărilor de mai sus se poate concluziona că sistemul extremal constituie instrumentul de lucru în proiectarea construcțiilor.

Practica proiectării construcțiilor de pe mapamond, din ultimul deceniu, evidențiază următoarele formulări ale modelului (4.6—4.7):

a) problema depozitării optime în care variabilele de proiectare — încărăcări — variază în anumite limite, căutîndu-se costul minim al depozitului.

b) problema lui J. F. Collins [38], în care sînt propuse geometria și secțiunile, căutîndu-se încărcarea maximă.

c) problema capacității portante, în care geometria, secțiunile și forma încărcării sînt precizate și se caută parametrul intensității încărcării maxime.

d) problema combinată a celor de la punctele a, b, c.

Proiectarea optimală a structurilor din ultimele două decenii a folosit pe scară largă optimizarea secvențială, ai cărei algoritmi convenționali sînt cei mai eficienți în rezolvarea problemelor cu un număr limitat de variabile și restricții. Optimizarea secvențială implică descompunerea optimizării globale în subprobleme mai mici. Fiecare subproblemă este soluționată independent la un prim nivel de optimizare, urmînd să fie coordonată cu un alt nivel succesiv de optimizare [103, 148, 149].

De cele mai multe ori proiectarea de ansamblu în construcții conduce la modele cu un număr mare de variabile și restricții, încadrîndu-se astfel în sistemele extremale mari. Aceasta necesită utilizarea unor algoritmi specializați, adecvați acestor sisteme [109].

Observația 4.6. Alegerea criteriului de optimizare se realizează de către proiectant în contextul condițiilor economice care patronează viața socială în momentul efectuării proiectării. Sînt situații în care proiectantul opinează minimizarea costului materialelor încorporate în construcție. De asemenea sînt situații cînd costul

Scanned with OKEN Scanner

manoperei de edificare a construcției se bucură de prioritate. Alteori interesează și cheltuielile de întreținere, consolidare în vederea durabilității maxime. În sfîrșit, reuniunea tuturor acestor considerente într-o viziune globală de sinteză.

4.4.2. CRITERIUL COSTULUI MINIM

Pentru acele construcții la care cheltuielile de exploatare depind în mică măsură de soluția din proiect (exemplu, betonul sub toate formele sale: simplu, armat, pretensionat), în calitate de criteriu de optimizare se poate adopta costul materialelor.

Pentru un element de construcție din beton armat criteriul costului global al betonului și oțelului se scrie

$$C=(C_bV_b+C_aV_a), \tag{4.8}$$

unde C_b, C_a sînt costul betonului, respectiv al armăturii, iar V_b și V_a sînt volumul de beton și armătură.

Pentru construcțiile alcătuite din n bare din beton armat criteriul se scrie

$$C=\sum_{i=1}^{n}(C_bV_b+C_aV_a)_i. \tag{4.9}$$

În sfîrșit, pentru o secțiune dreptunghiulară avînd dimensiunile $b\times h$, μ procentul de armare, $c=C_a/C_b$

$$C=bh\,(1+\mu c). \tag{4.10}$$

Dacă se are în vedere faptul că încovoierea este preponderentă, costul scade odată cu creșterea înălțimii h. Secțiunile obținute cu acest criteriu sînt înalte și înguste, ceea ce favorizează fenomenul pierderii stabilității.

Sînt considerente care optează pentru majorarea costului secțiunilor înalte:

a) costul lucrărilor de cofraj,

b) majorarea volumului interior al încăperilor, care aduce cu sine ridicarea costului închiderilor și creșterea costului pentru încălzirea spațiului sporit.

Deci, problema optimizării scheletului portant este inseparabilă de problema proiectării în general a construcției.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru structurile static nedeterminate alcătuite din bare se poate considera b şi h impuse astfel că criteriul de optimizare se aduce la forma:

$$C=\sum_{i=1}^{n} \mu_i l_i. \tag{4.11}$$

La proiectarea optimă a elementelor se poate ivi situaţia în care înălţimea este propusă. Aceasta modifică criteriul costului la forma:

$$C=\sum_{i=1}^{n} c\, l_i \frac{M_i}{0{,}4R_a \cdot h_{oi}}\left(1+0{,}55\cdot\frac{C_a\cdot R_i}{C_b\cdot R_a}\right). \tag{4.12}$$

Dacă se impune restricţia ca să nu se strivească betonul din zona comprimată, atunci funcţia cost are expresia

$$C=c\sum_{i=1}^{n} l_i \frac{M_i}{0{,}3R_a \cdot h_{oi}}\left(1+0{,}37\cdot\frac{C_a\cdot R_i}{C_b\cdot R_a}\right), \tag{4.13}$$

a cărei calitate esenţială este caracterul său liniar.

Pentru construcţiile spaţiale din beton armat criteriul optimizării poate fi generalizat la forma:

$$C=\int_v \sum_{i=1}^{n} \mu_i dv, \tag{4.14}$$

unde μ_i sînt coeficienţii armării pe cele n direcţii propuse.

Pentru cazul a două direcţii de armare cu braţul cuplului constant criteriul costului minim se scrie pentru o placă:

$$C=\int_s \left(M_x^{+\lim}+M_y^{+\lim}+M_x^{-\lim}+M_y^{-\lim}\right)dA, \tag{4.15}$$

unde $M_x^{+\lim}=R_a\cdot A_{ax}\cdot h$ este momentul plastic limită pe direcţia X, h fiind braţul cuplului interior, iar S suprafaţa plăcii.

Criteriul costului minim este aplicabil oricărei construcţii, putînd fi completat cu evidenţa tuturor detaliilor şi a costului execuţiei. Astfel, costul total al unei grinzi compuse sudate din oţel poate fi reprezentat în expresia următoare [158, 169]:

$$C=h\delta L\,[C_1(h,\delta)+2\sum_{i=1}^{n+1} bt_i d_i\,[C_1(b,t_i)]+ \tag{4.16}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$+2\sum_{i=1}^{n} C_2(b, t, t_{i+1})(t_{i+1}-t_i)+2L\,[C_2(\delta)]+$$

$$+C_3(N_n, h, A_n)+C_1\left[h\sum_{j=1}^{n_r} A_j+n_l LA_l\right].$$

Primul termen înregistrează costul inimii grinzii, h — înălțimea, δ — grosimea inimii, L — lungimea grinzii, $C_1(h, \delta)$ — costul tablei; de oțel depinzînd de grosimea și lățimea tablei; al doilea termen precizează costul tablei din tălpi — b lățimea tălpii, t grosimea tablei tălpii în sectorul i, d_i lungimea sectorului al i-lea al grinzii, $C_1(b, t_i)$ costul tablei, n numărul îmbinărilor sudate; al treilea termen fixează costul lucrărilor de sudură la îmbinarea foilor de tablă ale tălpilor, $C_2(b, t_i, t_{i+1})$ este costul lucrărilor pentru o joantă

$$C_2(b, t_i, t_{i+1})=c\cdot b\cdot A_s+C_l, \tag{4.17}$$

unde c este costul unui cm^3 de metal topit, A_s este suprafața secțiunii transversale a cordonului de sudură, depinzînd de grosimile tablelor care se îmbină (t_i, t_{i+1}), C_l costul lucrărilor pregătitoare și a controlului pentru un cordon. Al patrulea termen înregistrează costul cordoanelor de sudură care prind tălpile de inimă; al cincilea termen înregistrea ă costul nervurilor transversale: C_3 costul nervurilor cu evidența execuției și a sudurii, N_n este numărul nervurilor transversale, iar A_n este aria secțiunii transversale a nervurii. Ultimul termen înregistreză costul nervurilor de reazem și a nervurilor longitudinale, A_j aria secțiunii transversale a nervurii de reazem, n_r numărul nervurilor de reazem, n_l numărul nervurilor longitudinale, A_r aria secțiunii transversale a nervurii longitudinale. În mod analog pot fi întocmite funcții scop ale costului pentru bare cu secțiune variabilă, cu axă curbilinie, pentru plăci și pînze cu grosime constantă sau variabilă.

Un factor tehnologic important care trebuie înregistrat la determinarea prețului de cost al construcției este acela al tipizării elementelor. Efectul tipizării poate să depășească cu mult efectul reducerii volumului materialelor. Problema tipizării optime a unei serii de construcții deja proiectate se poate rezolva separat, dar mult mai eficientă este examinarea optimizării la rezistență a construcției împreună cu tipizarea în limitele unui model matematic unitar în care se evidențiază atît parametrii mecanici, cît și cei tehnologici [159, 162, 164].

Scanned with OKEN Scanner

Din experienţă se constată că o construcţie optimă în stadiul proiectării poate deveni neoptimă în cadrul execuţiei din cauza unor neajunsuri privind aprovizionarea cu materiale adecvate, condiţii de timp, mînă de lucru calificată. De aceea, este la fel de important să se gîndească un model în condiţii de producţie concretă. Sistemele de calcul automat fac posibilă includerea în model a unor caracteristici de proiectare în cadrul factorilor care influenţează mersul construcţiei. În [162] se prezintă modelul matematic pentru dirijarea proiectării construcţiei unui cadru etajat, la care după terminarea etajului 2 s-a trecut la executarea silită cu profile existente diferite de cele din proiectul iniţial. Astfel, dirijarea flexibilă a proiectului în cursul procesului de edificare permite obţinerea efectelor economice în condiţiile unor livrări zădărnicite.

Observaţia 4.7. Dacă o construcţie se edifică în perioade diferite de timp este necesară evidenţa asincronismului cheltuielilor. Pentru sumarea cheltuielilor făcute în prezent cu cheltuielile ce se vor face peste n ani se apelează la coeficientul de echivalare a cheltuielilor [162].

4.4.3. CRITERIUL GREUTĂŢII MINIME

Un criteriu simplificat, dar foarte folosit este acela al greutăţii minime a materialelor obţinut prin aproximarea de proporţionalitate între costul construcţiei şi greutatea ei.

Criteriul greutăţii minime este aplicabil cu preponderenţă construcţiilor din materiale omogene (lemn, metal), formulîndu-se pe scheletul sistemelor extremale de greutate minimă (Cap. III). Acest criteriu se aplică şi construcţiilor din materiale neomogene (beton, beton armat), cu toate că în acest caz devine mai puţin realist. Astfel, o construcţie din beton armat de greutate minimă va avea un procent de armare maxim [162]. Pe de altă parte, criteriul greutăţii minime poate duce la dificultăţi tehnologice, care să anuleze caracterul optim obţinut prin reducerea consumului de material.

Scanned with OKEN Scanner

4.4.4. SIGURANȚA CONSTRUCȚIILOR ȘI CRITERIILE DE OPTIMIZARE

Obținerea celor mai bune caracteristici ale exploatării este parte integrantă a oricărei proiectări. Dar criteriul costului minim sau al greutății minime nu determină încă caracterul de sistem optim. Problema poate fi completată cu supoziții privind siguranța în exploatare a construcției. Astfel, posibilitatea ieșirii din funcțiune a unui element de construcție pe perioada duratei de exploatare se revendică ca o cerință a modelului extremal.

În acest context, modelul extremal pentru o construcție din bare se scrie

$$G = G(A_k) \rightarrow min \tag{4.18}$$

$$P_f(A_k) \leqslant P_f^{adm} \quad \text{restricții,} \tag{4.19}$$

unde: A_k sînt variabile constructive, $P_f(A_k)$ probabilitatea de capotare a elementului k, P_f^{adm} probabilitatea admisibilă de capotare.

Observația 4.8. P_f^{adm} se obține pe baza cunoștințelor actuale despre costul distrugerii, care include numeroase limitări privind tensiunile, deformațiile, pierderea stabilității.

Observația 4.9. Ecuația (4.19) bazată pe punctul de vedere că siguranța are numai un sens probabilistic este un criteriu potrivit pentru alegerea dimensiunilor elementelor la proiectarea construcțiilor.

Dacă P este funcția siguranței sistemului, iar C funcția costului, formularea duală a proiectării optime cu siguranță limitată se scrie

$$\text{a)} \quad C = C(A_k) \rightarrow min \tag{4.20}$$

$$P(A_k) \geqslant P^{adm} \quad \text{restricții,}$$

$$\text{b)} \quad P = P(A_k) \rightarrow max$$

$$C(A_k) \leqslant C^{adm} \quad \text{restricții.} \tag{4.21}$$

Dacă se iau în considerare mărimile adimensionale ale rigidității elementelor ca parametrii independenți ai proiectării, funcția greutății se scrie sub forma

$$G(g) = \sum_{s=1}^{r} \{[G_s]^\circ + \Delta G_s(g_s)\}, \tag{4.22}$$

unde: r este numărul elementelor sistemului, $[G_s]^\circ$ — greutatea inițială a elementului s ales pe limita de rezistență, $\Delta G_s(y_s)$ creșterea greutății cauzată de conlucrarea cu elementele sistemului.

Siguranța sistemului în acest caz se evaluează [92] prin criteriul

$$K_p = \frac{G(g)}{[G]^\circ} \quad \text{cu} \quad [G]^\circ = \sum_{s=1}^{r} [G_s]^\circ, \tag{4.23}$$

G fiind greutatea sistemului cu siguranță mare care corespunde condițiilor rezistenței și /sau rigidității și/ sau stabilității. Analog, se cere să se găsească vectorul r-dimensional $g = g_s (s = \overline{1, r})$ care determină sistemul de bare cu greutate minimă într-o zonă oarecare limitată de condiția siguranței sistemului sau vectorul care determină sistemul cu siguranță maximă, avînd greutatea limitată.

Observația 4.10. La sistemele static determinate este valabilă condiția capotării construcției cînd un element cedează.

Observația 4.11. Cu ajutorul mulțimii refuzurilor construcției se poate da metoda formării funcției siguranță pentru sisteme de bare static nedeterminte cu schemă și siguranță impusă [147].

Sub refuz, în teoria siguranței, se înțelege incidentul care cauzează situația de „inapt" a unui element pentru îndeplinirea funcției sale. Elementele se distribuie după grupele refuzurilor, așa încît sistemul să refuze numai în cazul refuzului tuturor elementelor grupei, iar refuzul unor submulțimi din grupa respectivă nu provoacă refuzul sistemului. Dacă sistemul are m grupe de refuzuri, iar q este funcția siguranței elementelor, atunci funcția siguranție Q a întregului sistem se poate exprima prin

$$Q = 1 - \sum Q(A_j) + \sum_{j<1} Q(A_j A) - \sum_{j \leq 1 < s} Q(A_j A_l A_s) + \ldots \tag{4.24}$$

unde A_j este întîmplarea care constă în aceea că grupa a j-a a refuzului Γ_j se distruge în timpul t. Formula este valabilă pentru refuzuri independente cînd probabilitatea de cedare se scrie

$$Q\{A_{l_1}, A_{l_2}, \ldots, A_{l_s}\} = P_{s_1} P_{s_2} \ldots P_{s_l}, \tag{4.25}$$

unde: $P(1-q)$ este probabilitatea refuzului elementului; $s_1, s_2, \ldots, s_s$ sînt numerele elementelor care intră în grupele $\Gamma_{l_1}, \Gamma_{l_2}, \ldots, \Gamma_{l_s}$.

În problema enunțată, siguranța era determinată pentru întreaga durată de exploatare T. După cum se știe, exploatarea

Scanned with OKEN Scanner

unei construcții este însoțită de înrăutățirea treptată a calității ei, iar funcția siguranței capătă un caracter descrescător. Pentru a evidenția aceste modificări, fiecărui punct din spațiul calității i se atașează corespunzător o funcție de penalitate $C(g, \tau)$, unde g este vectorul variabilelor independente, τ este longivitatea. Astfel, la rezolvarea problemei se poate efectua simultan și calculul de longevitate, ținînd seama de influența timpului [147].

În unele cazuri, în proiectare este oportună examinarea siguranței sistemului care se atinge la timpul $t \leqslant T$. Influența cauzelor externe asupra sistemului (privind rezistența materialelor și starea lor de exploatare) poate fi reprezentată ca niște procese stochastice, conducînd în mod natural la teoria sistemelor extremale stochastice (vezi cap. II).

4.4.5. CROIREA OPTIMĂ

Rezolvarea problemei croitului optim permite să se obțină elemente cu dimensiuni geometrice propuse, în cantități propuse, folosind o cantitate minimă de semifabricate sau, ceea ce este același lucru, minimizînd deșeurile. Din rezolvarea acestei probleme rezultă că uneori este mai convenabil să se folosească, de exemplu, o suprafață mare a secțiunii elementului, ajungînd totodată la o variantă mai rentabilă a croiului. În acest fel, croirea reprezintă un factor care poate pune la îndoială rezultatele optimizării tradiționale. În consecință, apare necesitatea alcătuirii unui model complex care să evidențieze concomitent factorii de rezistență și considerațiile croitului materialelor [160].

Dacă se admite, pentru barele unei construcții, suprafața secțiunii transversale A_i, modulul de rezistența W_i și lungimea l_i, atunci folosirea diferitelor semifabricate se poate descrie prin variabila Boole, δ_{ρ_i}

$$\delta_{\rho_i} = \begin{cases} 0, & \text{dacă semifabricatul } i \text{ nu se folosește pentru elementul } \rho, \\ 1, & \text{dacă semifabricatul } i \text{ se folosește la elementul } \rho. \end{cases} \tag{4.26}$$

Scanned with OKEN Scanner

Asigurarea tuturor barelor necesare în cantităţile b duce la condiţia

$$\sum_{i,k} a_{\rho_i} x_{ik} \geqslant b_\rho \delta_{\rho_i}, \tag{4.27}$$

unde: x_{ik} este cantitatea semifabricatelor de tipul i croite prin metoda k, $a_{\rho_{ik}}$ este cantitatea barelor de tipul ρ obţinute prin metoda de croi k din semifabricatul i.

Dacă se va cere volumul minim al prefabricatelor folosite, aceasta se exprimă prin

$$\sum_i l A_i \sum_k X_{ik} \to min. \tag{4.28}$$

La aceasta trebuie adăugate condiţiile de echilibru şi limitările pentru rezistenţă, stabilitate, rigiditate etc.

4.5. CÎTEVA MODELE PENTRU CONSTRUCŢIILE METALICE

Criteriul de optimizare al elementelor de construcţii metalice vizează cheltuielile de material şi cele de manoperă. Pentru simplificare, majoritatea autorilor acceptă ipoteza proporţionalităţii cheltuielilor de manoperă cu greutatea elementului. Atunci cînd secţiunea elementului este constantă pe toată lungimea lui, este suficient a lua drept criteriu produsul dintre aria secţiunii şi preţul unitar al materialului.

4.5.1. SORTIMENTUL PROFILELOR LAMINATE

Optimizarea unor serii de profile laminate poate fi concepută de pe două poziţii diferite:

a) Sortimentul să fie cît se poate de voluminos, iar risipa de material cît mai mică, respectînd condiţiile de rezistenţă.

Scanned with OKEN Scanner

b) Sortimentul ar trebui să fie cît mai mic pentru reducerea costului de laminare.

După cum se vede, sînt două poziţii diametral opuse. Criteriul de optimizare va evidenţia ambele aspecte pentru ca pierderile să fie minime. Pentru exprimarea analitică a acestor cerinţe sînt necesare informaţii reale asupra capacităţii portante a profilelor şi a costului de laminare.

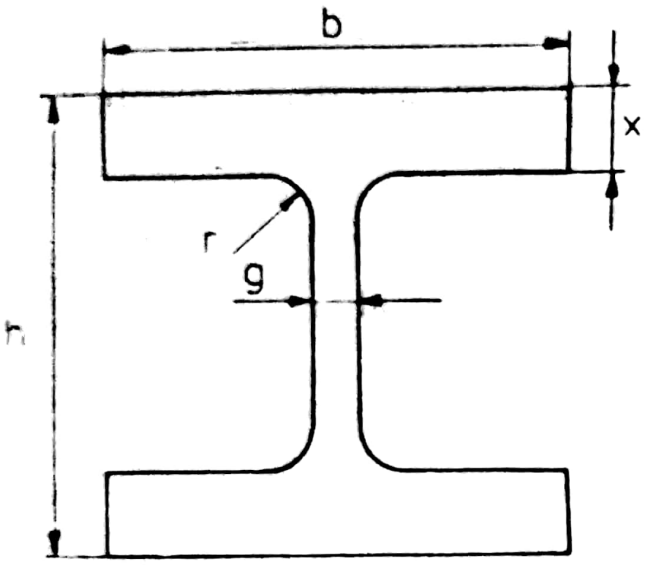


Fig. 4.8.

O cerinţă fundamentală a tehnologiei de laminare o constituie durata de răcire, care se apreciază prin raportul suprafeţei secţiunii transversale a tălpilor şi a inimii, raport care nu trebuie să depăşească anumite valori. Aceste valori sînt precizate de tradiţia laminării în diferite ţări. De asemenea, se iau în seamă rapoartele dintre dimensiunile geometrice ale secţiunii (b/t_p, h/t_i etc.) din diferite ţări care servesc drept restricţii în cadrul problemei.

Luînd ca bază ţările europene, [111] formulează modelul matematic al sortimentului de laminare dublu T cu tălpi late (I.P.E.), fig. 4.8

$$G=hg+4\frac{b-g}{2}t+4\cdot 0{,}2146\, r^2\rightarrow min$$

$$g-g_d\geqslant 0;\quad b/t-6{,}6\geqslant 0;\quad -b/t+20{,}5\geqslant 0$$

$$t/g-1{,}3\geqslant 0;\quad -t/g+2{,}\geqslant 0;\quad t/r-0{,}6\geqslant 0$$

$$-t/r+2{,}1\geqslant 0;\quad b/g-10{,}3\geqslant 0;\quad -b/g+22{,}5\geqslant 0$$

$$b/r-7{,}1\geqslant 0;\quad -b/r+22{,}7\geqslant 0;\quad h/b-1\geqslant 0$$

$$-h/b+3{,}8\geqslant 0;\quad h/t-13{,}6\geqslant 0;\quad -h/t+43\geqslant 0$$

$$W_x-W_{xd}\geqslant 0;\quad W_y-W_{yd}\geqslant 0;\quad i_y-i_d\geqslant 0.$$

Indicele d se referă la valorile minime.

Scanned with OKEN Scanner

4.5.2. PROFILE METALICE SUDATE

Să se găsească secţiunea dublu T a unei grinzi metalice care necesită cel mai redus cost, fig. 4.9. Grinda are secţiune constantă pe toată lungimea ei şi trebuie să reziste la un moment încovoietor maxim, $M\,max$, şi o forţă tăietoare normală maximă, $Q\,max$, fără a depăşi rezistenţa de calcul R_c. În afara acestor cerinţe, grinda trebuie să îndeplinească condiţii constructive, cum ar fi de, exemplu, grosimea minimă a inimii $\geqslant t_{min}$, înălţimea inimii să nu depăşească h_{max}, condiţii de stabilitate a tălpilor exprimate prin raportul dintre lăţimea şi grosimea tălpii etc.

Cu aceste precizări, modelul matematic va fi

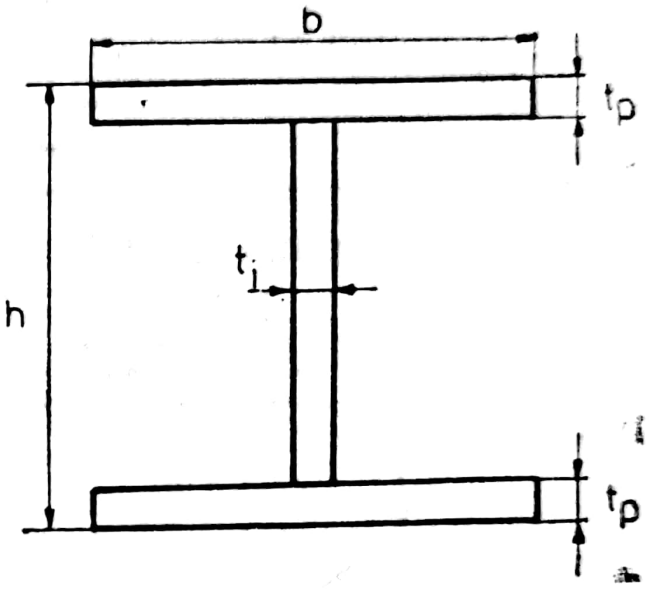


Fig. 4.9.

$$\left.\begin{aligned} G&=(2b\cdot t_p+h\cdot t_i)\,\gamma_{OL}\rightarrow min\\ \sigma&=\frac{M\,max}{W}\leqslant R_c\\ \tau&=\frac{Q\,max\cdot S}{t_i I}\leqslant 0{,}6\,R_c \end{aligned}\right\}\text{condiţii de rezistenţă}$$

$$\left.\begin{aligned} t_{min}\leqslant t_i\leqslant t_{max}\\ K_1\leqslant\frac{b}{t_p}\leqslant K_2 \end{aligned}\right\}\text{condiţii de stabilitate}$$

$$t_i>0;\quad b>0;\quad h>0;\quad t_p>0.$$

Notaţiile W, I şi S sînt

$$W=I/\left(t_p+\frac{h}{2}\right)$$

$$I=\frac{t_i h^3}{12}+2\cdot b\cdot t_p\left(\frac{h+t_p}{2}\right)^2$$

Scanned with OKEN Scanner

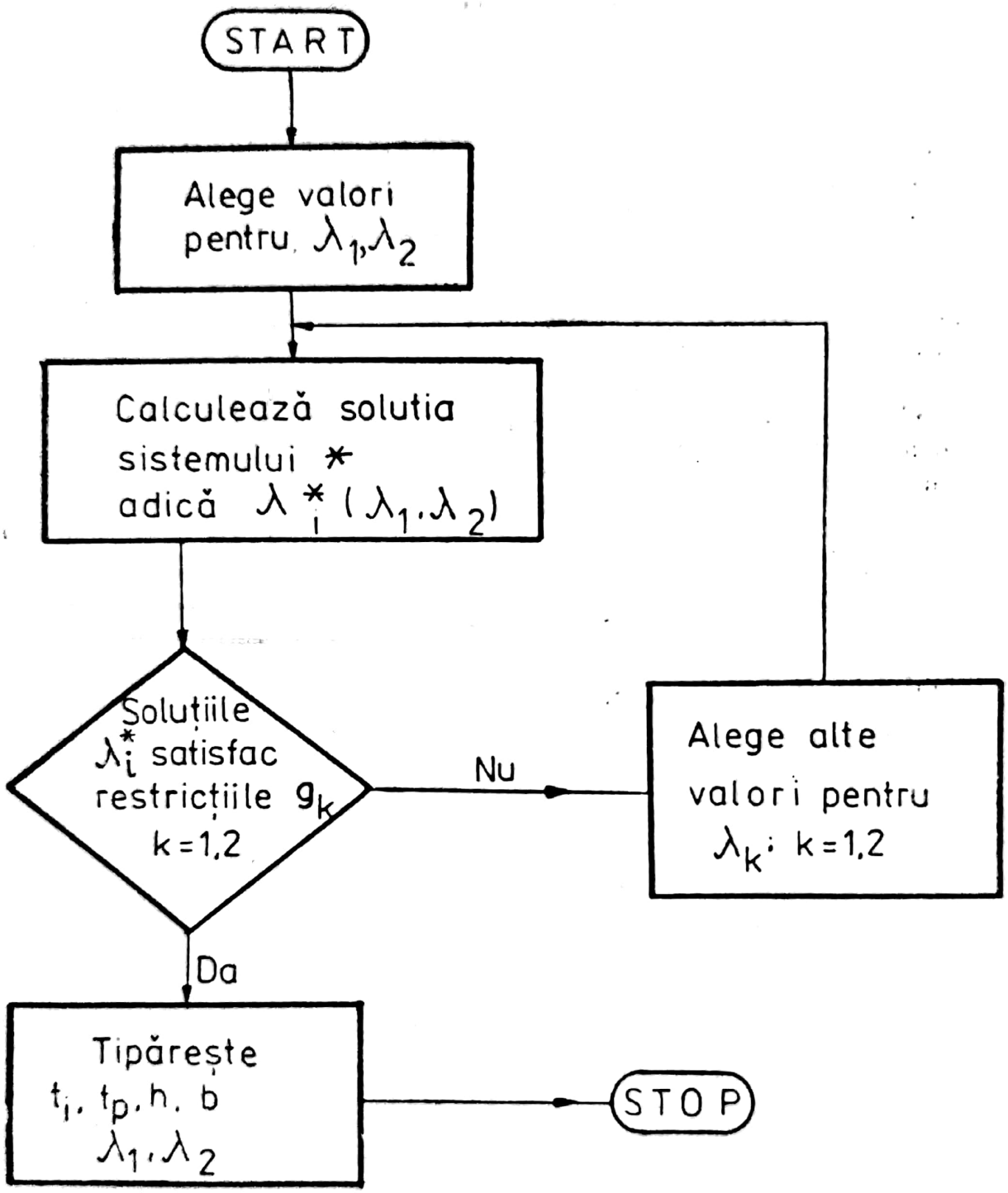


Fig. 4.10.

$$S=\frac{h^2 t_i}{2}+b\cdot t_p\frac{h+t_p}{2}.$$

Observația 4.12. Dacă se caută și calitatea oțelului, modelul se completează cu relația de legătură a peretelui cu limita de curgere a oțelului, găsindu-se exemplul din [111].

Scanned with OKEN Scanner

Aceeaşi problemă mai poate fi formulată în felul următor [181] :

$$G=(2b\cdot t_p+ht_i)\,\gamma_{OL}\rightarrow min$$

$$g_1=I-\frac{bt_p}{2}\left[h^2+\frac{t_p^2}{3}\right]-\frac{h^3t}{12}=0$$

$$g_2=\frac{b}{t_p}-\frac{6.000}{\sqrt{\sigma_c}}=0 \quad \text{condiţie de stabilitate.}$$

Folosind tehnica multiplicătorilor lui Lagrange, calculele se conduc astfel :

$$\frac{\partial G}{\partial b}+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial b}+\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial b}=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial t_p}+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial t_p}+\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial t_p}=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial t_i}+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial t_i}+\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial t_i}=0.$$

Efectuarea calculelor vizează determinarea parametrilor λ_1, λ_2, b. h, t_p, t_i după următoarea organigramă (fig. 4.10).

4.5.3. ADAPTAREA SECŢIUNII UNEI GRINZI LA CONFIGURAŢIA DIAGRAMEI MOMENTULUI ÎNCOVOIETOR

O grindă cu inimă plină, continuă cu două deschideri inegale urmează a fi întărită cu platbenzi pe ambele tălpi deasupra reazemului central. Se caută lungimea şi poziţia acestor platbenzi care minimizează greutatea grinzii. Fenomenul de stabilitate laterală este împiedicat prin suporţi laterali. Grinda este încărcată cu o acţiune verticală q. Se cunosc rezistenţa la încovoiere R_a şi rezistenţa de curgere a oţelului R_c [190].

Urmărind fig. 4.11 se poate scrie modelul matematic :

$$G=2t_pb_p\,(K_1L_1+K_2L_2)+(L_1+L_2)\,(2t_jb_j+h_it_i)\rightarrow min,$$

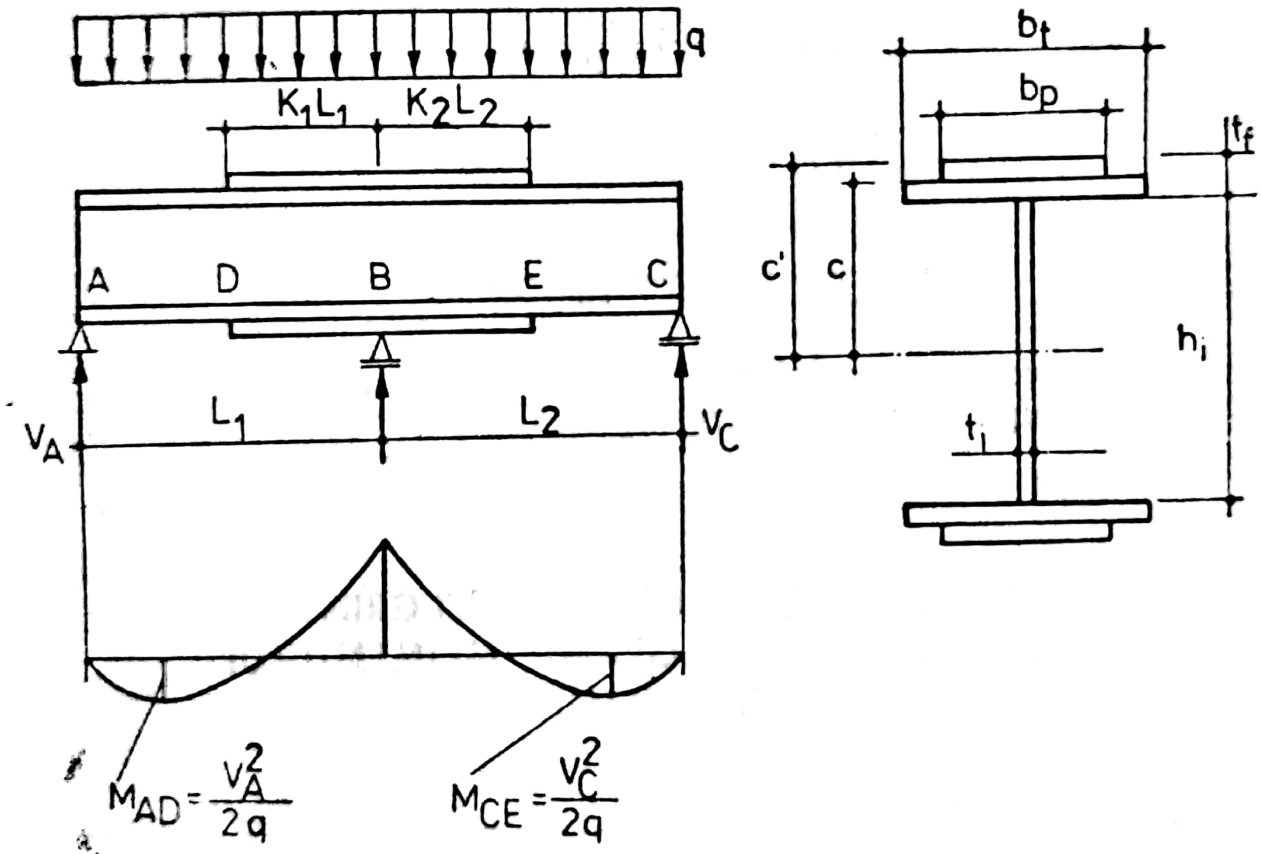
Scanned with OKEN Scanner

cu restricțiile

$$\frac{c \cdot M_{AD}}{I} = \frac{V_A^2}{2q}\left(\frac{h_i}{2}+t_f\right)\frac{1}{I} \leqslant R_e$$

$$\frac{c \cdot M_{CE}}{I} = \frac{V_e}{2q}\left(\frac{h_i}{2}+t_f\right)\frac{1}{Q} \leqslant R_c$$

$$\frac{c \cdot M_D}{I'} = \frac{1}{p}\left[\frac{qL_1^2}{p}(1-K_1)^2 - V_A L_1 (1-K_1)\right]\left(\frac{h_i}{2}+t_f\right) \leqslant R_c$$



$$M_D = \frac{qL_1^2}{2}(1-K_1)^2 - V_A L_1 (1-K_1)$$

$$M_E = \frac{qL_2^2}{2}(1-K_2)^2 - V_C L_2 (1-K_2)$$

Fig. 4.11.

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{c \cdot M_F}{I} = \frac{1}{P}\left[\frac{qL_2^2}{2}(1-K_1)^2 - V_C L_2 (1-K_2)\right]\left(\frac{h_i}{2}+t_f\right) \leqslant R_c$$

$$\frac{c' \cdot M_B}{I} = \frac{M_B \cdot \left(t_p + t_i + \frac{h_i}{2}\right)}{P + 2b_p t_p \left(t_f + \frac{h_i + t_p}{2}\right)} \leqslant R_c.$$

I' și I sînt momentele de inerție ale secțiunii transversale a grinzii cu și fără flanșele de întărire, iar

$$P = \frac{t_i h_i^3}{12} + 2b_f t_f \left(\frac{h + t_f}{2}\right)^2.$$

Se adaugă condițiile constructive

$$t_f \geqslant 5/16$$

$$t_p \geqslant 5/16$$

$$t_i \geqslant 5/16$$

$$b_f \geqslant 6\,000\, t_f/\sqrt{\sigma_c}$$

$$h_i \leqslant \frac{14 \cdot 10^6}{\sigma_c(\sigma_c + 16500)} \cdot t_i.$$

Un alt mod de abordare a problemei adaptării secțiunii la variația momentului încovoietor conduce în cele ce urmează la modelul secvențial.

Pentru grinda simplu rezemată, fig. 4.12, alcătuită ca o secțiune dublu T simetrică se caută consumul de oțel astfel ca greutatea ei să fie minimă, cu condițiile de rezistență și rigiditate respectate în oricare secțiune [168].

Dimensiunile inimii sînt stabilite din condiția rezistenței la forfecare în dreptul reazemelor. Pe parcursul formalizării se păstrează constante aria secțiunii inimii și lățimea tălpilor pe toată lungimea grinzii. Se caută grosimea tălpilor. Se practică descompunerea fiecărei semideschideri a grinzii în patru sectoare — lun-

Scanned with OKEN Scanner

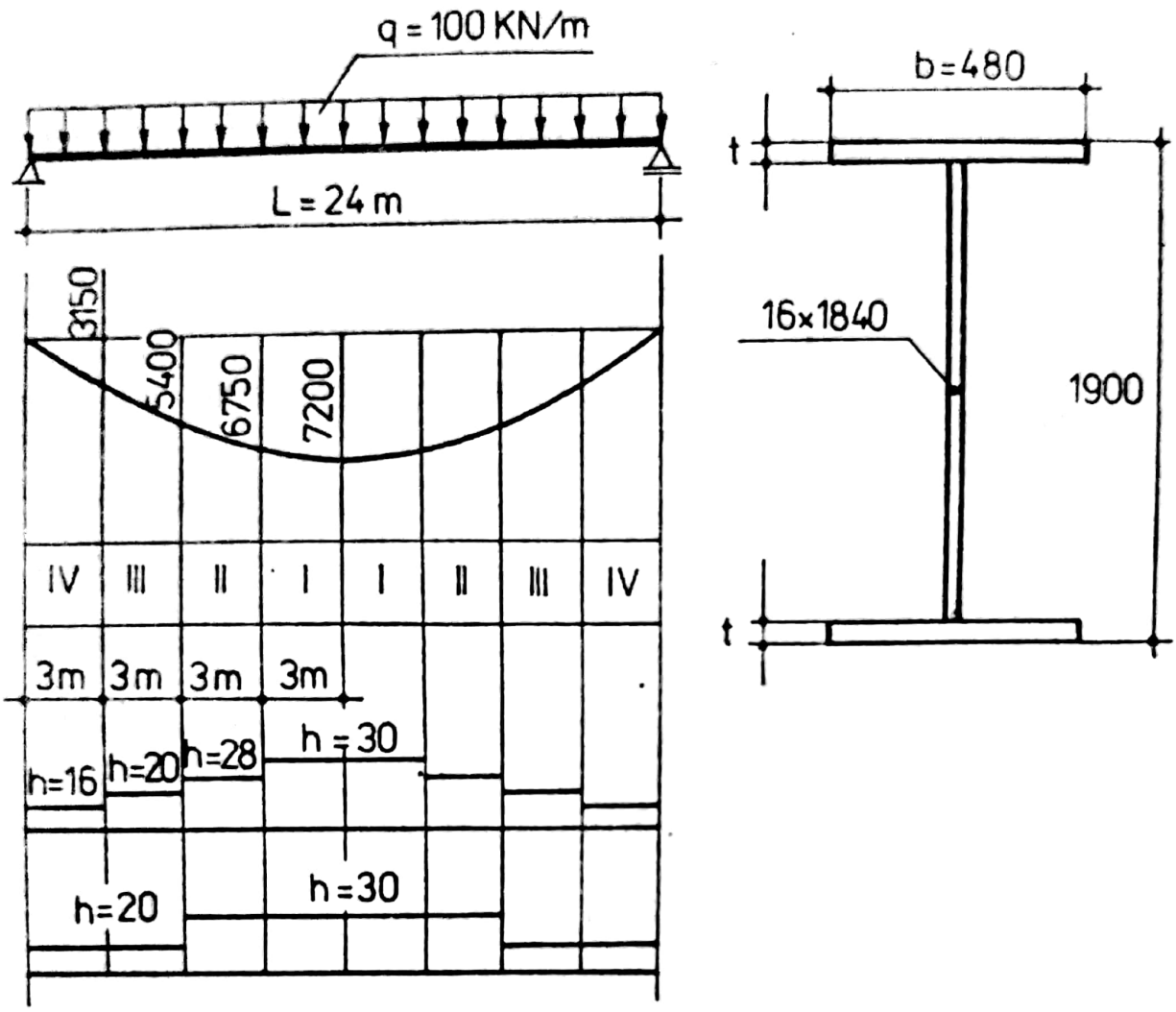


Fig. 4.12.

gimea fiecărui sector 3 m. Grosimea minimă a tablei tălpilor se limitează la valorile din tabelul 4.1, conform

Tabelul 4.1

Nr.	I	II	III	IV
t [mm]	30	28	20	16

condiției de stabilitate locală $t = b/30$. Stabilitatea generală este asigurată de legături.

Dacă în fiecare sector există o altă grosime de tablă, atunci rezultă un număr mare de îmbinări sudate al căror cost poate anula avantajul reducerii consumului de oțel obținut prin schimbarea

Scanned with OKEN Scanner

grosimii tălpii. Dacă se va micşora numărul joantelor sudate, economisind material şi manoperă de sudare, atunci în unele sectoare grosimea tablei tălpilor va fi excesivă, cauzînd un excedent la cheltuielile de oţel. În concluzie se pune problema obţinerii optimului de realizare a unei secţiuni dublu T, cu luarea în seamă a cheltuielilor de execuţie şi a celor de material.

Se aleg ca preţuri următoarele unităţi : $C_1=25u$ pentru 1 KN de oţel, $C_2=0{,}1u$ pentru 1 cm³ de metal de sudură depus şi $C_3=10u$ pentru lucrările de pregătire şi control ale sudurii la un cordon de sudură.

Costul materialului depus într-o sudură de lungime 300 mm, fig. 4.13, se poate evalua pentru aria haşurată astfel :

$$\Delta C=C_1\gamma \cdot 300 \cdot 48\,(t-t_0)=28\,(t-t_0),$$

cu $\gamma=78 \cdot 10^{-6}$ KN/cm³ greutatea specifică a oţelului.

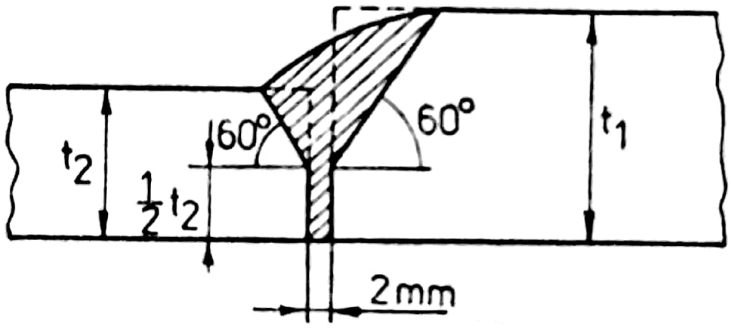


Fig. 4.13.

Costul unui cordon de sudură C_s cînd lungimea lui este 48 cm cu luarea în seamă a materialului de adaos şi a manoperei se scrie

$$C_s=C_2 \cdot A_s \cdot 48+C_3=4{,}8\,A_s+10$$

şi pentru diferite grosimi ale tablelor sînt trecute în tabelul 4.2.

Tabelul 4.2

t_1 [cm]	3,0				2,8		2,0
t_2 [cm]	3,0	2,8	2,0	1,6	2,0	1,6	1,6
A_s [cm²]	1,9	1,9	2,05	2,19	1,79	1,91	1,01
C_s [u]	19,12	19,12	19,85	20,52	18,60	19,15	14,85

Scanned with OKEN Scanner

Pentru rezolvarea problemei se parcurg mai multe etape.

Alcătuirea schemei problemei

Ordinea de alcătuire a schemei este analoagă cu ordinea în care are loc execuția.

Se examinează tălpile din semideschiderea stîngă. Dispunem de plăci de oțel de grosime 30, 28, 20 și 16 mm și lățimea 480 mm, lungimea fiind 12 m.

În sectorul I se alege platbanda de grosime maximă 30 mm. Se admite ca bază de calcul costul a 4 foi de tablă cu dimensiunile din fig. 4.11 și grosimile indicate în tabelul 8, adică $t_i \times 480 \times \times 3\,000$ mm. Cheltuielile care depășesc acest preț se vor numi debit.

Pentru sectorul II grosimea tălpii poate fi de 30 mm sau 28 mm. La grosimea de 30 mm în sectorul II este necesară o joantă al cărui cost este 19,12 *u*, la grosimea de 28 mm costul sudurii are un excedent numai de 5,6 *u*.

Pentru sectorul I există o variantă unică a alcătuirii care corespunde cantității minime posibile de material, ceea ce dă debitul zero.

Pentru sectorul II există două variante de alcătuire, cărora le corespund debitele: 19, 12 *u* și 5,6 *u*.

Rezultatele alcătuirii vor fi denumite prin grosimea tălpii, fig. 4.14.

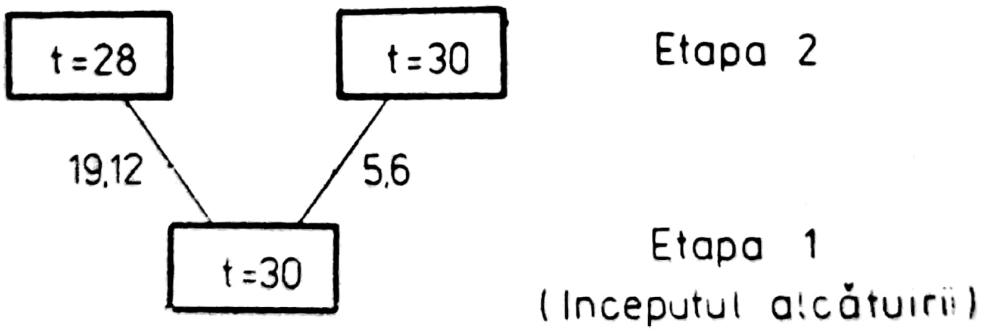


Fig. 4.14.

În etapa a 3-a a alcătuirii sînt posibile trei stări ale tălpii, $t=30$, $t=28$, $t=20$. Se va examina trecerea la aceste stări noi din fiecare stare a etapei a 2-a.

1. —$t=28$ (etapa a 2-a) nu este necesară joantă, dar în sectorul III grosimea tablei va fi mai mare decît cea minimă posibilă. —$t=20$ debitul este 22,4 u.

Trecerea la starea de $t=30$ este evident neeconomică.

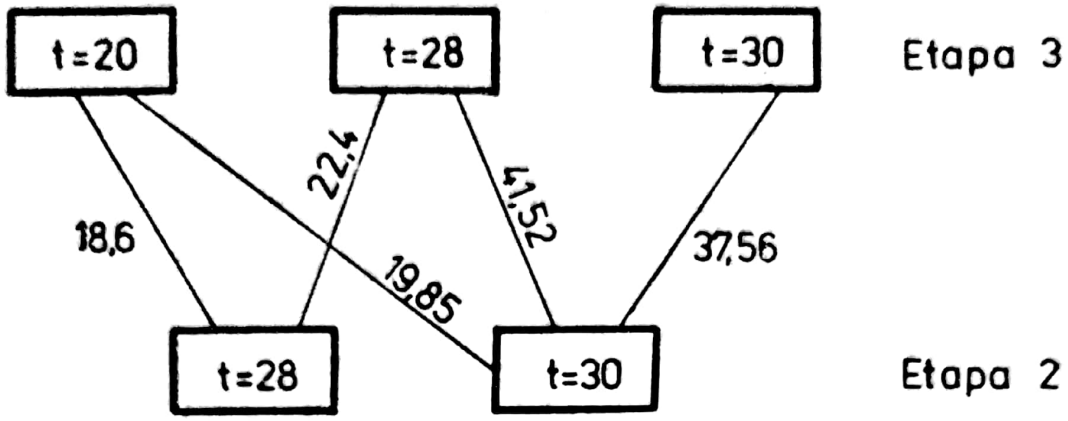


Fig. 4.15.

2. —t=30 (etapa a 3-a). Cînd se trece la starea t=20 debitul este 19,85 u ; cînd se trece la starea t=28 debitul va fi 41,52 u. Trecerea la starea t=30 aduce cu sine excedentul de 28 u, deoarece apare o sudură între foile de t=30 mm întrucît se depăşeşte lungimea de livrare 12 m. Costul acestei joante este un excedent de 9,56 u, astfel că excedentul trecerii de la t=30 (etapa a 2-a) la t=30 (etapa a 3-a) se ridică la 9,56+28=37,56 u.

Schema completă a problemei se indică în fig. 4.16.

Concret, parcurgerea schemei se face în paşi. Fiecare pas se realizează ca o trecere de la una din stările posibile în etapa precedentă (starea iniţială a pasului respectiv) la una din stările corespunzătoare etapei următoare (starea finală a pasului). De regulă, stării iniţiale îi corespund cîteva stări finale. Alegerea uneia din stările finale din toate stările finale care corespund unei stări iniţiale se numeşte comandă. Stabilirea comenzii pe primul pas ajunge la starea concretă a etapei a 2-a, şi alegînd comanda pe pasul 2 ajunge la starea concretă a etapei a 3-a ş.a.m.d. Fiecărei căi îi corespunde debitul său global, care se compune din cheltuielile pe fiecare pas. Printre toate căile posibile există o cale optimă căreia îi corespunde debitul minim.

Cea de-a 2-a etapă a rezolvării problemei parcurge schema în sens invers de la sfîrşitul schemei către începutul ei.

Se începe cu pasul al 4-lea — ultimul. Rezultatul acestui pas pentru toate stările este acelaşi — de la orice stare a etapei a IV-a se poate trece la închiderea alcătuirii — în fiecare din cele 4 treceri cheltuiala este zero.

Examinarea pasului al 3-lea. Pentru el iniţiale vor fi stările etapei a III-a. Se va examina una dintre ele, de exemplu, starea

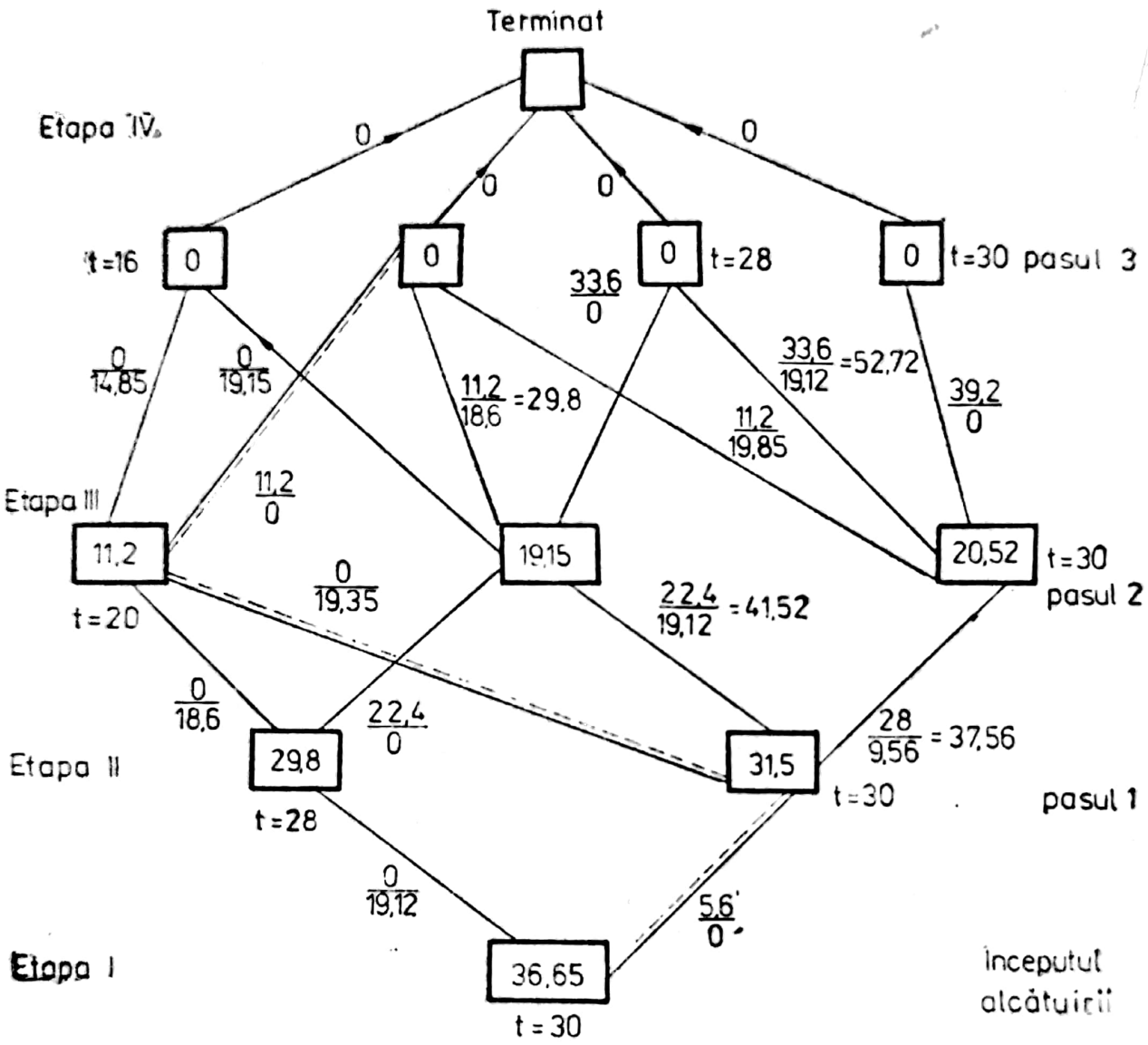


Fig. 4.16.

$t=20$. Dacă se trece de la starea $t=20$ la starea $t=16$ (etapa a IV-a), atunci cheltuiala în pasul al 3-lea va fi 14,85 *u*. Se observă că în cazul dat aceasta coincide cu cheltuiala pe ultimii doi paşi, deoarece cheltuiala pe ultimul pas al 4-lea este nulă. Dacă ar fi diferită de zero, atunci cheltuiala globală pe traseul de la $t=20$ (etapa a III-a) pînă la capătul schemei ar fi egală cu suma cheltuielilor $14{,}85+a$ (a fiind fixat în cerculeţul stării $t=16$).

O altă variantă de trecere de la starea $t=20$ (etapa a III-a) se poate trece la starea $t=20$ (etapa a IV-a). Cheltuiala pe pasul al 3-lea este 11,2 *u*. Deci comanda optimă de la etapa a IV-a la etapa a III-a este $t=16$, $t=20$.

La alegerea comenzilor optime convenționale se folosește ideea principală a sistemelor secvențiale extremale: oricare ar fi starea inițială pentru pasul respectiv și oricare ar fi comanda admisă pe acest pas, soluțiile pe toți pașii următori asigură cheltuială totală minimă. Pe baza acestui principiu, alegerea comenzii optime convenționale pe pasul al n-lea se efectuează în conformitate cu următoarea relație [18]

$$f_n(t_n^*) = min\,[g_n(t_n^*, t_{n-1}^i) + f_{n-1}(t_{n-1}^i)] \tag{4.29}$$

$$t_{n-1}^1 \leqslant t_{n-1}^i \leqslant t_{n-1}^k,$$

unde: t_n^* este starea inițială a pasului al n-lea,

t_{n-1}^i — una din stările finale ale pasului al n-lea spre care se poate trece din stare inițială fixată t_n $(i=1, 2, \ldots, k)$,

$f_{n-1}(t_{n-1}^i)$ — cheltuiala totală pe $(n-1)$ pași care au rămas pînă la capătul schemei cînd mișcarea se face din starea t_{n-1}^i,

$g_n(t, t_{n-1}^i)$ — este debitul pe pasul al n-lea, corespunzător trecerii de la starea t_n la starea t_{n-1}^i

Determinarea căii optime constă în precizarea comenzii convenționale pentru primul pas, pentru ca debitul total pe traseul de la starea inițială a primului pas pînă la sfîrșitul schemei să fie minim. Dar starea inițială a primului pas este starea inițială a întregii scheme. Prin urmare, comanda optimă pe primul pas este o comandă optimă absolută — ea stabilește direcția traseului real optim pentru primul pas.

Pe fig. 4.16 calea optimă este arătată cu o linie punctată. Cheltuiala de 36,65 u reprezintă debitul total minim corespunzător traseului optim.

Urmînd calea optimă, se formează rezolvarea problemei: pe sectoarele I, II grosimea va fi $t=30$ mm, în sectoarele III și IV, $t=20$ mm. Joanta sudată între $t=30$ mm și $t=20$ mm trebuie executată în fiecare semideschidere a grinzii, la distanța de 6 m de la reazem.

Scanned with OKEN Scanner

4.5.4. ÎNCĂRCAREA MAXIMĂ PENTRU UN ELEMENT PRECIZAT

În cazul în care se precizează secțiunea, schema statică și poziția încărcărilor se poate pune problema stabilirii încărcării maxime pe care o suportă elementul. Ca exemplu se consideră grinda de rulare din fig. 4.17, cu ajutorul căreia se ridică diferite greutăți de la sol prin intermediul palanelor mixte cu care este echipată. Se caută care este încărcarea maximă concretă care poate fi ridicată în poziția indicată.

Cablurile 1 și 2 au o capacitate portantă de 8 unități, cablurile 3 și 4 au capacitate 16 unități și fiecare grindă, 5,6, suportă 20 unități fiecare.

Dacă F_i, $i=1,4$ sînt forțele în cabluri și F_5, F_6 apăsarea roților pentru echilibru, se scriu ecuații de moment față de cele 6 puncte. Aceasta conduce la

$$F_1=\frac{1}{3}G_2\,;\quad F_2=\frac{2}{3}G_2\cdot\quad F_3=\frac{8}{15}G_2+\frac{2}{5}G_3,$$

$$F_4=\frac{2}{15}G_2+\frac{3}{5}G_3\,;\quad F_5=\frac{3}{4}G_1+\frac{7}{12}G_2+\frac{1}{4}G_3,$$

$$F_6=\frac{1}{4}G_1+\frac{5}{12}G_2+\frac{3}{4}G_3.$$

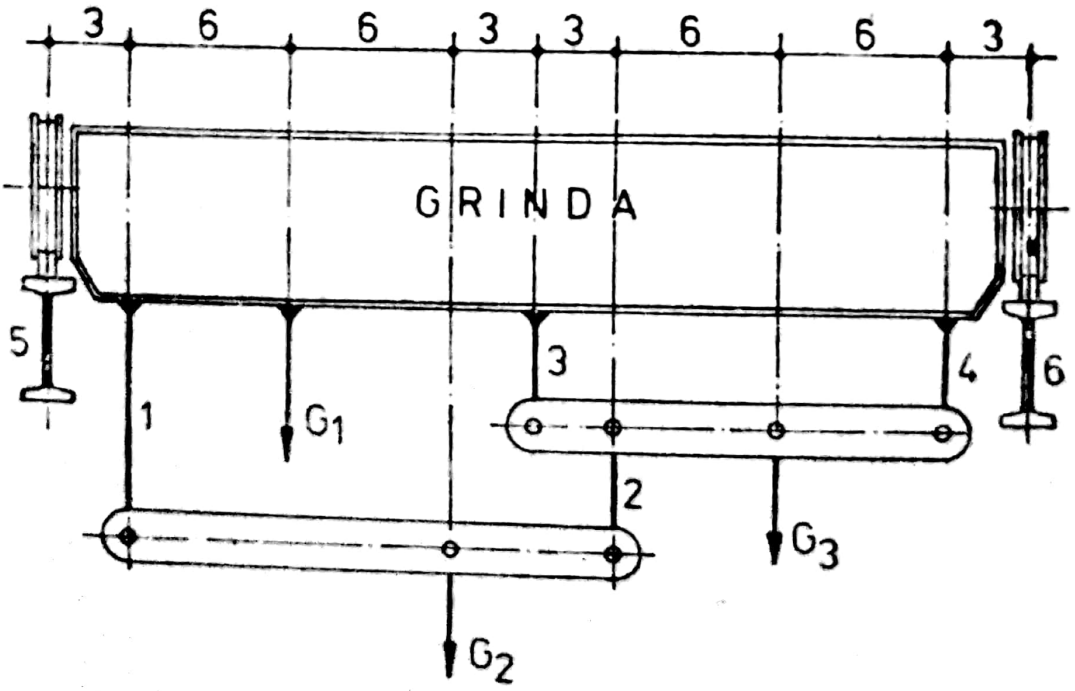


Fig. 4.17.

Modelul se scrie [190]

$$G_1+G_2+G_3 \rightarrow max$$

$$\frac{1}{3}G_2 \leqslant 8$$

$$\frac{2}{3}G_2 \leqslant 8$$

$$\frac{8}{15}G_2+\frac{2}{5}G_3 \leqslant 16$$

$$\frac{2}{15}G_2+\frac{3}{5}G_3 \leqslant 16$$

$$\frac{3}{4}G_1+\frac{7}{12}G_2+\frac{1}{4}G_3 \leqslant 20$$

$$\frac{1}{4}G_1+\frac{5}{12}G_2+\frac{3}{4}G_3 \leqslant 20$$

$$G_1,\ G_2,\ G_3 \geqslant 0.$$

4.5.5. ELEMENTE DE CONSTRUCȚII METALICE SOLICITATE DE EFORT AXIAL

Grinda cu zăbrele din fig. 4.18 este acționată de forța P. Cele trei bare sînt articulate în noduri și permit eforturile admisibile σ_i^+ la tracțiune și σ_i^- la compresiune. Se caută secțiunile transversale ale barelor care minimizează cantitatea de material încorporată în construcție [190]

$$G=\frac{L}{\cos 30^\circ}A_1+L\cdot A_2+\frac{L}{\cos 60^\circ}A_3 \rightarrow min.$$

Condițiile de echilibru pentru punctul a

$$P_x=\sigma_1 A_1 \cos 30+\sigma_2 A_2+A_3\sigma_3 \cos 60$$

$$P_y=-\sigma_1 A_1 \sin 30+\sigma_3 A_3 \sin 60\ .$$

Scanned with OKEN Scanner

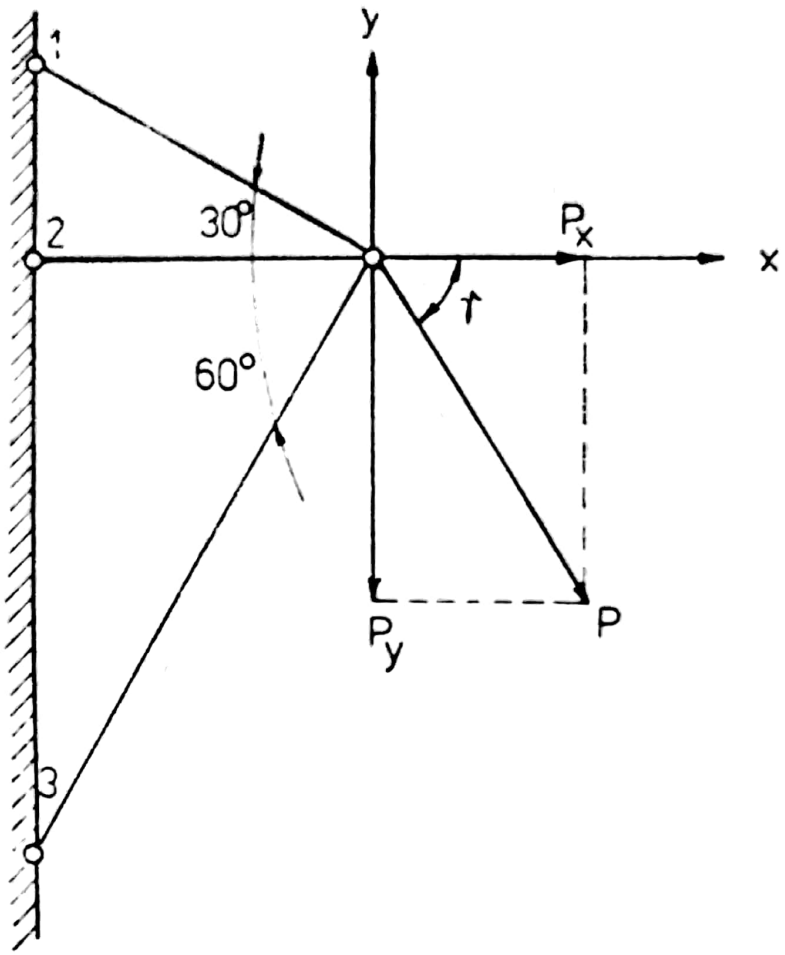


Fig. 4.18.

Ecuațiile deplasării nodului *a* sînt

$$\frac{L}{\cos 30°} \cdot \frac{1}{E_1} = Y_x \cos 30° - Y_y \sin 30°$$

$$L \cdot \frac{\sigma_2}{E_2} = Y_x$$

$$\frac{L}{\cos 60°} \cdot \frac{\sigma_3}{E_3} = Y_x \cos 60° - Y_x \sin 60°$$

$$E_1 = E_2 = E_3.$$

Ecuațiile de mai sus au caracter de simultaneitate și conduc la ecuația:

$$\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 = 0.$$

În sfîrşit, problema primeşte forma finală :

$$G=\frac{L}{\cos 30^\circ}A_1+LA_2+\frac{L}{\cos 60^\circ}A_3\to min$$

$$\sigma_1 A_1 \cos 30^\circ+\sigma_2 A_2+\sigma_3 A_3 \cos 60^\circ=P\cos\gamma$$

$$-\sigma_1 A_1 \sin 30^\circ \qquad +\sigma_3 A_3 \sin 60^\circ=P\sin\gamma$$

$$\sigma_1 \qquad -\sigma_2 \quad +\sigma_3 \qquad =0$$

$$\sigma_a^- \leqslant \sigma_i \leqslant \sigma_a^+.$$

4.5.6. FERMĂ STATIC DETERMINATĂ

Se propune problema determinării configuraţiei optime şi secţiunile optime ale barelor unei grinzi cu zăbrele static determinată, supusă la o încărcare precizată. Se caută de fapt înălţimile optime ale montanţilor sau lungimea optimă a panourilor [148].

Se va examina ferma din fig. 4.19, simetrică în raport cu montantul central sub acţiunea sistemului arbitrar de încărcări inde-

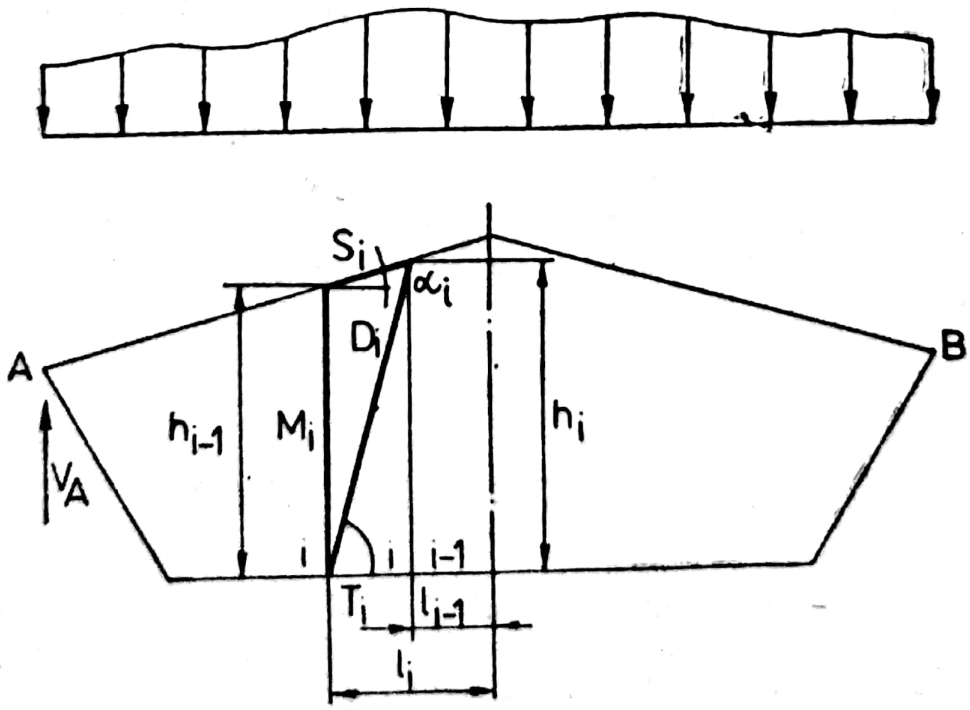


Fig. 4.19.

pendente $q_m(m=\overline{1, n})$. Se consideră panoul al i-lea pentru care dimensiunile geometrice se definesc prin h_{i-1}, h_i, l_{i-1}, l_i.

Solicitările în barele panoului se calculează prin metoda secţiunilor: astfel că se pot determina ariile secţiunilor transversale prin împărţirea eforturilor la R sau φR.

Greutatea totală a barelor care compun panoul i se scrie:

$$g_i(h_{i-1}, h_i, l_{i-1}, l_i) = A_{is}\sqrt{(l_i-l_{i-1})^2+(h_{i-1}-h_i)^2}+ \\ +A_{iM}h_i+A_{iT}(l_{i-1}-l_i)+A_{iD}\sqrt{h_{i-1}^2+(l_{i-1}-l_i)^2}, \tag{4.30}$$

unde A_{is}, A_{iM}, A_{iT}, A_{iD} sînt ariile secţiunilor transversale ale tălpii superioare, montantului, tălpii inferioare şi respectiv a diagonalei din panoul al i-lea.

Prin urmare, problema se reduce la o asemenea alegere a elementelor fermei care depind de parametrii proiectării h_i, l_i meniţi să minimizeze greutatea

$$G=\sum g_i(h_{i-1}, h_i, l_{i-1}, l_i)\rightarrow min. \tag{4.31}$$

Procesul găsirii soluţiei optime se împarte în secvenţe succesive, în fiecare dintre acestea trebuind să se găsească soluţia optimă.

Pentru aceasta se construieşte relaţia de recurenţă

$$f_k(h_k, l_k)=\min_{\substack{h_{k-1}\\ l_{k-1}}} [g_k(h_{k-1}, h_k\ l_{k-1}, l_k)+f_{k-1}(h_{k-1}, l_{k-1})], \tag{4.32}$$

care dă greutatea minimă a primelor k panouri.

Procesul se parcurge din centrul fermei către reazeme.

Problema se simplifică radical dacă sînt date înălţimile montanţilor (fermele de acoperiş) sau sînt precizate lungimile panourilor tălpilor.

4.5.7. CADRU STATIC NEDETERMINAT

Calculul structurilor în domeniul plastic oferă posibilitatea soluţionării unor probleme folosind teoria sistemelor extremale liniare. Modelul matematic al problemei pentru cadrul din fig. 4.20 se poate scrie după ce în prealabil s-au precizat mecanismele de

Scanned with OKEN Scanner

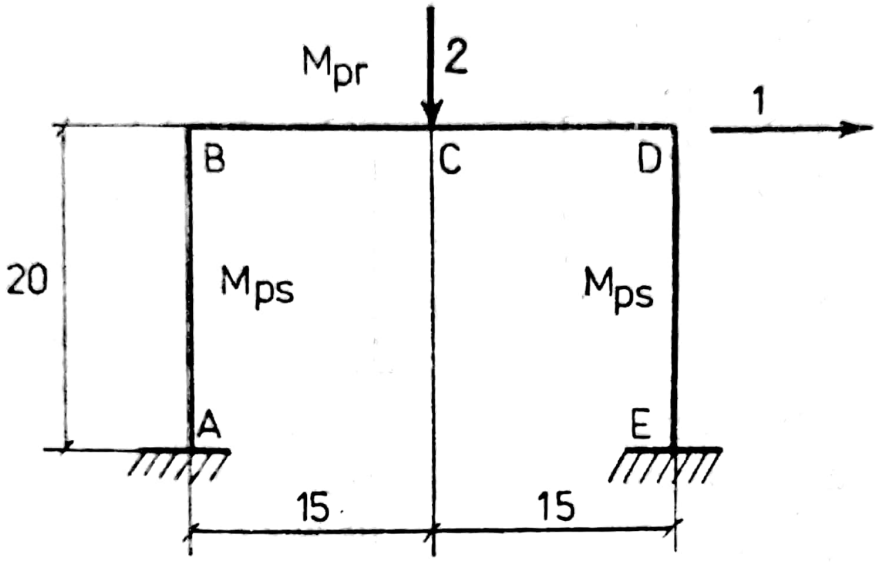


Fig. 4.20.

cedare. Se cunosc inițial capacitatea portantă a stîlpilor și a riglei notate respectiv cu M_{ps}, M_{pr}. Criteriul de proiectare constă în minimizarea greutății barelor componente. Cum însă capacitatea portantă a barelor este proporțională cu mărimea ariei secțiunii transversale, criteriul de proiectare devine

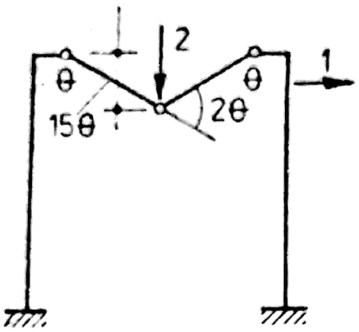
$$G=40\ M_{ps}+30\ M_{pr}\rightarrow min.$$

Restricțiile se obțin punînd condiția fiecărui mecanism de cedare ca lucru mecanic virtual W al încărcării să fie mai mic decît energia de deformație U acumulată. În fig. 4.21 sînt redate cele două mecanisme de grindă, mecanisme paralelogram și mecanisme combinate care permit scrierea restricțiilor problemei :

$$\begin{aligned}
&4M_{pr} && \geqslant 30\\
&2M_{ps}+2M_{pr} && \geqslant 30\\
&2M_{ps}+2M_{pr} && \geqslant 20\\
&4M_{ps} && \geqslant 20\\
&2M_{ps}+4M_{pr} && \geqslant 50\\
&4M_{ps}+2M_{pr} && \geqslant 50\\
&M_{ps},\ M_{pr} && >0.
\end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

1. Mecanism de grindă

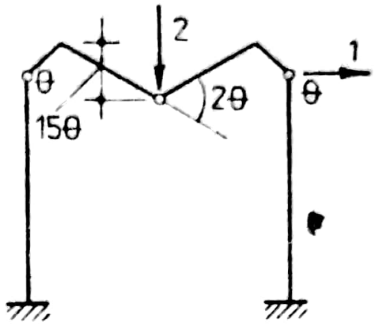


$U = 2M_{pr}\theta + 2M_{pr}\theta$

$W = 2 \times 15\theta = 30\theta$

$U \geq W$

$4M_{pr} \geq 30$



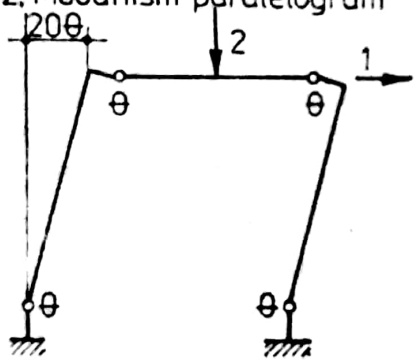
$U = 2M_{pr} + 2M_{ps}\theta$

$W = 2 \times 15\theta = 30\theta$

$U \geq W$

$2M_{ps} + 2M_{pr} \geq 30$

2. Mecanism paralelogram

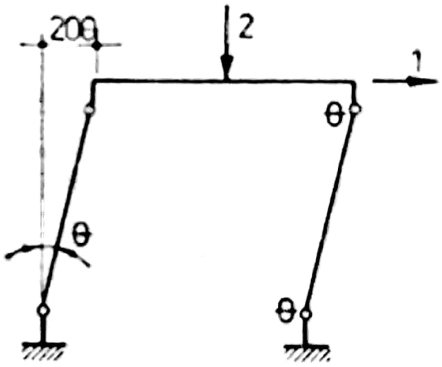


$U = 2M_{pr} + 2M_{ps}\theta$

$W = 1 \times 20\theta = 20\theta$

$U \geq W$

$2M_{ps} + 2M_{ps} \geq 20$



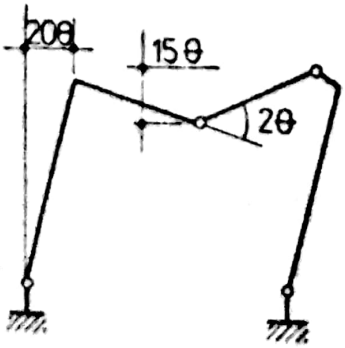
$U = 4M_{ps}\theta$

$W = 1 \times 20\theta = 20\theta$

$U \geq W$

$4M_{ps} \geq 20$

3. Mecanisme combinate

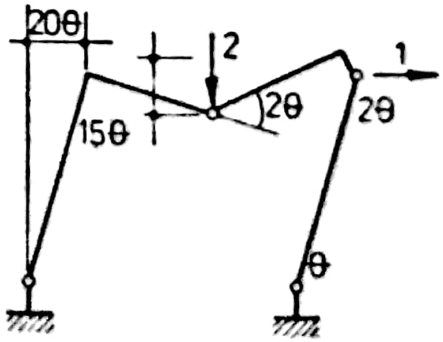


$U = 4M_{pr}\theta + 2M_{ps}\theta$

$W = 1 \times 20\theta + 2 \times 15\theta$

$U \geq W$

$2M_{ps} + 4M_{pr} \geq 50$



$U = 4M_{ps}\theta + 2M_{pr}\theta$

$W = 20\theta + 2 \times 15\theta$

$U \geq W$

$4M_{ps} + 2M_{pr} \geq 50$

Fig. 4.21.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvarea grafică a problemei, fig. 4.22, este deosebit de sugestivă și prezintă sinoptic supozițiile teoretice ale algoritmului simplex [190].

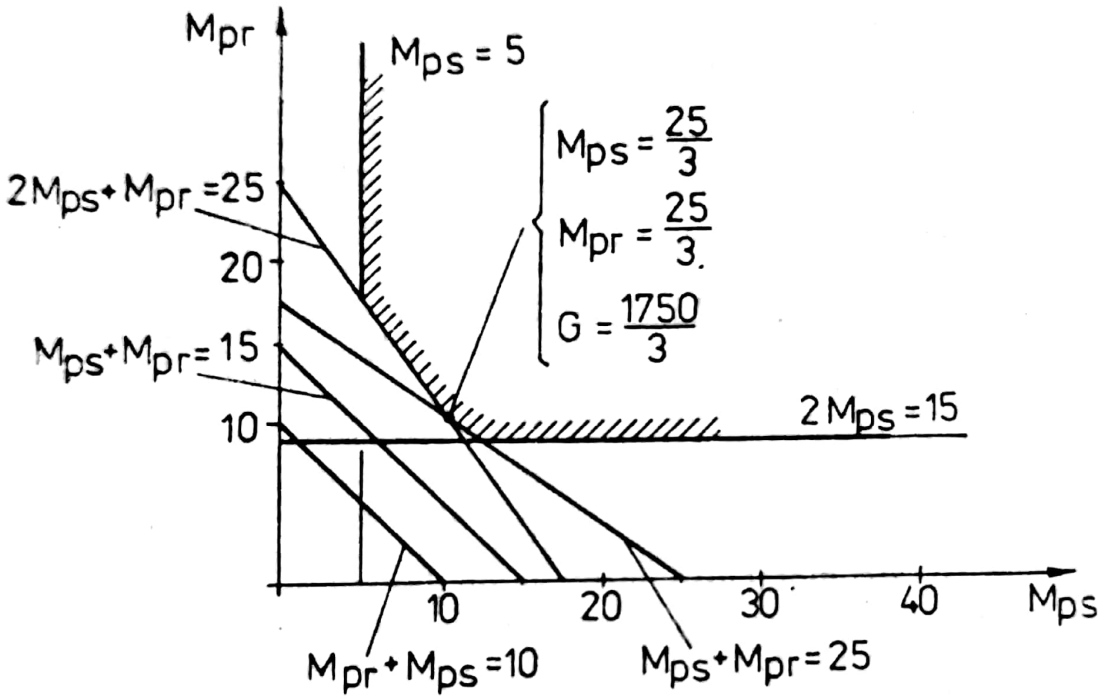


Fig. 4.22.

4.6. CÎTEVA MODELE PENTRU CONSTRUCȚII DIN BETON ARMAT

4.6.1. GRINZI DIN BETON ARMAT CU SECȚIUNE CONSTANTĂ

Se consideră o grindă de secțiune transversală dublu T și armare constantă pe unitatea de lungime, fig. 4.23.

Pentru acest caz se consideră următorul criteriu de proiectare:

$$C = bh\,[1+\gamma+\gamma'+cm\mu]$$

$$\gamma' = \frac{(b_t'-b_i)h_t'}{b_i h}; \quad \gamma = \frac{(b_t-b_i)h_t}{b_i h} \quad \mu = \frac{A_a}{b(h-a)}; \quad c = \frac{C_a}{C_b}; \quad m \approx 1{,}1.$$

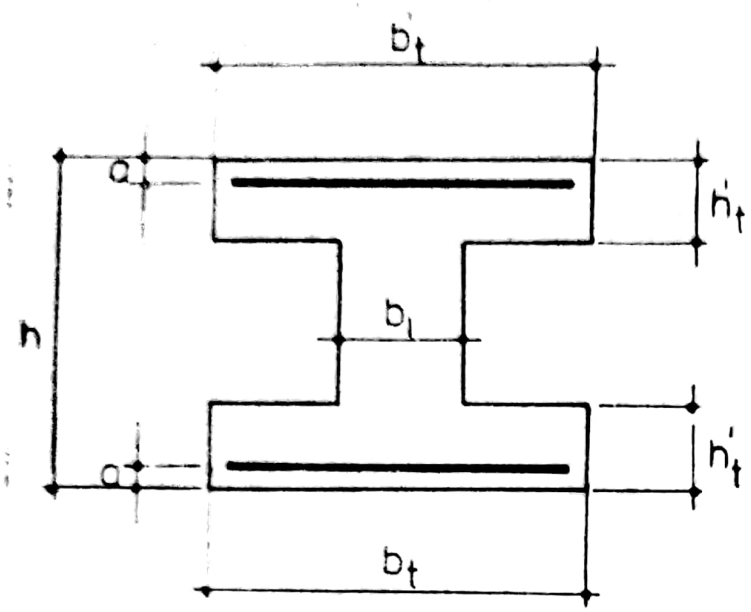


Fig. 4.23.

Tratarea matematică a problemei : să se găsească mărimile h, b_i, b_t, h'_t, h_t, astfel încît

$$C \to min. \tag{4.33}$$

cu restricţiile

$$M_{ext} \leqslant M$$

$$\frac{S_b}{S_0} \leqslant \xi \tag{4.34}$$

$$f \leqslant f_a$$

$$a_f \leqslant a_f^0,$$

unde : M_{ext} este momentul încovoietor din încărcarea exterioară, M — capacitatea portantă a celei mai solicitate secţiuni, f, f_a — săgeata şi săgeată admisă, a_f, a_f^0 — deschiderea admisă a fisurilor. S_b, S_0 — momentul static al părţii comprimate şi al întregii secţiuni în raport cu centrul de greutate al armăturii întinse, ξ — o valoare normată. Criteriul de proiectare poate fi cercetat în raport cu fiecare restricţie separat. Dacă nu se limitează superior înălţimea secţiunii, preţul de cost minim se obţine cînd toate celelalte caracteristici geometrice tind spre zero, adică pentru secţiunea dreptunghiulară [159].

4.6.2. GRINDA CONTINUĂ CALCULATĂ LA STAREA LIMITĂ DE REZISTENŢĂ

În tratarea liniară costul construcţiei se admite proporţional cu momentul M_0 pe care îl poate prelua elementul în starea limită. Evaluarea consumului necesită propunerea secţiunii şi parametrul acesteia. Dacă secţiunea este dreptunghiulară, propunînd înălţimea secţiunii, rezultă lăţimea şi cantitatea de armătură corespunzătoare momentului încovoietor M_0. Dacă se propune atît înălţimea cît şi lăţimea, rezultă cantitatea de armătură. Ambele procedee necesită

Scanned with OKEN Scanner

propuneri pentru brațul cuplului interior. Această necesitate se depășește dacă se introduce o condiție suplimentară care să lege consumul de oțel cu momentul limită atunci cînd sînt date dimensiunile secțiunii. Condiția de echirezistență poate servi drept această condiție. Aceasta cere ca în fiecare secțiune momentul de calcul să fie egal cu momentul limită pentru care armătura atinge tensiunea de curgere [159].

Din punct de vedere fizic, condiția echirezistenței reprezintă un lanț cinematic practic nerealizabil, totuși, ea constituie o măsură de apreciere a proiectului căci prin intermediul ei se obține epura optimală a armăturii grinzii.

Se consideră o grindă continuă cu n deschideri. Încărcarea din fiecare deschidere poate fi exprimată prin

$$q=\lambda_i q_i(x), \tag{4.35}$$

unde: $q_i(x)$ este forma algebrică a încărcării, iar λ_i intensitatea încărcării care se cere determinată.

Înainte de a trece direct la examinarea problemei sînt utile următoarele precizări. Dacă se propune o distribuție oarecare a momentelor de reazem M_i, grinda continuă inițială poate fi gîndită ca n grinzi cu o singură deschidere, fiecare fiind acționată de momentele de reazem M_i și M_{i+1} și încărcarea $\lambda_i q_i(x)$.

Examinarea unei astfel de grinzi de secțiune transversală dreptunghiulară are momentul limită M_0, brațul cuplului Z și aria secțiunii de armătură date de relațiile:

$$M_0=R_a A_a Z$$

$$Z=h_0-\frac{R_a A_a}{2R_b b}$$

$$A_a=\frac{b\cdot R_b}{R_a}\left[h_0-\sqrt{h_0^2-\frac{2}{bR_b}\,|M_0|}\right].$$

Introducînd valoarea lui M_0 în raport cu încărcarea și momentele de reazem, se poate exprima volumul de armătură V_{ai} pe fiecare deschidere:

$$V_{ai}=\int_{l_i} A_a dx=\int_{l_i}\frac{bR_b}{R_a}\left\{h_0-\left[h_0^2-\frac{2}{bR_b}\left(\frac{M_i-M_{i+1}}{l_i}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{q_i l_i}{2}\right)x-\frac{\lambda_i x^2}{2}-M_i\right]^{\frac{1}{2}}\right\}dx. \tag{4.36}$$

Dacă dispunem de volumul de armătură ce trebuie alocat deschiderii i, se pot preciza dependențele

$$\lambda_i = \varphi_1 (M_i, M_{i+1}, V_{ai}) \tag{4.37}$$

$$M_{i+1} = \varphi_2 (M_i, q_i, V_{ai}). \tag{4.38}$$

Dacă se propune raportul intensității încărcărilor din deschideri, atunci în starea limită se obține o asemenea distribuție a armăturii de volum V_{ai} pe lungimea grinzii, care se caracterizează prin valoarea maximă a parametrului încărcării. Propunînd alte rapoarte între încărcări se obține o altă distribuție a aceluiași volum de material corespunzătoare unei alte valori a parametrului încărcării. Așadar, există posibilități multiple de distribuție a armăturii pe lungimea grinzii, fiecare posibilitate corespunde stării limită față de un anumit raport al încărcării. Printre aceste procedee de armare este interesant acela care maximizează funcția încărcării totale

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{l_i} \lambda_i q_i (x)\, dl. \tag{4.39}$$

O asemenea problemă poate să apară, de exemplu, la proiectarea grinzilor planșeelor încăperilor de depozit și poate fi denumită problema depozitării optime.

În concluzie, trebuie să se găsească valorile M_i, $(i=\overline{1, n})$, astfel încît să fie atins maximumul funcționalei (4.23) și să fie îndeplinite restricțiile

$$\begin{gathered} \Sigma V_{ai} \leqslant V_a \\ M_{min} \leqslant M_i \leqslant M_{max} \\ M_x = M_0. \end{gathered} \tag{4.40}$$

Problema enunțată poate fi examinată sub patronajul optimizării secvențiale. Procesul distribuirii armăturii se reprezintă în mai multe etape. Astfel, în etapa a k-a se variază numai momentele de reazem a deschiderii k-a, anume M_k și M_{k+1}.

În prima etapă a rezolvării se destină primei deschideri volumul de armătură V_a^* astfel ca volumul $\Delta V_a < V_a^* < V$. Pentru armătura destinată V_a^* se caută momentele încovoietoare M_1, M_2 care corespund valorii maxime a parametrului λ_1. Valorile obținute pentru momentele de capăt pentru fiecare V^* constituie comenzile optime ale primei etape.

Scanned with OKEN Scanner

În continuare formularea problemei se exprimă astfel:

$$(4.41)\qquad \begin{cases} \lambda_i = \max\limits_{\{M_1,\, M_2\}} [\lambda_1 (V^*, M_1, M_2)] \\ M_{min} \leqslant M_i \leqslant M_{max}, \qquad i=1,\, 2 \\ \Delta V_a \leqslant V_a^* \leqslant V_a. \end{cases}$$

În etapa a 2-a a rezolvării, cantitatea separată de armătură V_a^* se distribuie pe două deschideri.

În etapa a k-a volumul separat al armăturii se distribuie pe deschiderea a k-a și celelalte deschideri precedente pentru a maximiza funcționala (4.23) pentru primele k-deschideri. Aceasta se realizează cu

$$(4.42)\qquad Q_k = \max \left[\int_{l_i} \lambda_k q_k (x)\, dl + Q_{k-1} (V_a^* - V_{ak}) \right],$$

unde

$$\lambda_k = \max\, [\varphi_1 (M_k, M_{k+1}, V_{ak})],$$

față de restricțiile

$$(4.43)\qquad \begin{cases} M_{min} \leqslant M_{k+1} \leqslant M_{max} \\ k\Delta V_a \leqslant V_{ak} \leqslant V_a^* - [(k-1)\, \Delta V] \\ k\Delta V_a \leqslant V^* \leqslant V. \end{cases}$$

4.6.3. GRINZI CONTINUE ECHIREZISTENTE

Față de problema de mai înainte se poate formula problema inversă — minimizarea volumului materialului. Pentru încărcări fixate, să se găsească valorile momentelor de reazem M_i, $(i=\overline{1,\, n+1})$, astfel încît volumul total al armăturii să fie minim

$$(4.44)\qquad \begin{cases} V_a = \Sigma\, V_{ai} \to \min \\ \text{cu condițiile} \\ M_{min} \leqslant M_i \leqslant M_{max}. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţia se găseşte formulînd funcţionala optimizării secvenţiale

$$
(4.45)\quad \begin{cases} V_{a,\,k+1}(M_{k+1}) = \min\limits_{\{M_k\}} [\varphi(M_k, M_{k+1}, \lambda_k) + V_{a,\,k}(M_k)] \\ \text{faţă de limitările :} \\ M_{min} \leqslant M_{k+1} \leqslant M_{max}. \end{cases}
$$

O altă problemă se formulează în felul următor : să se găsească valorile momentelor de pe reazem M_i $(i=\overline{1,\, n+1})$ astfel ca volumul total de armătură să fie minim

$$
(4.46)\quad \begin{cases} V_a = \sum\limits_{i=1}^{n} V_{a,i} \rightarrow min \\ \text{cînd sînt respectate restricţiile :} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \int_{l_i} \lambda_i q_i(x_i)\, dl = Q \\ M_{min} \leqslant M_i \leqslant M_{max} \\ \lambda_{i,\,min} \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_{i,\,max}. \end{cases}
$$

Problema proiectării optime a grinzilor continue cu comportare elastoplastică este rezolvată prin metoda optimizării secvenţiale în [132, 159], cu admiterea secţiunii constante în fiecare deschidere şi folosirea elementelor tipizate.

4.6.4. CONSTRUIREA EPUREI OPTIME A ARMĂTURII

Se împarte grinda de secţiune constantă cu diagrama momentelor încovoietoare dată în n sectoare, aşa încît în fiecare sector se pot accepta ca fiind constante : momentul încovoietor şi cantitatea de armătură A_{ai}. Parametrul variabil este cantitatea de armătură pe tronsonul i.

Scanned with OKEN Scanner

Problema se poate formula astfel: să se găsească valorile A_{ai}; $i=\overline{1, n}$, față de care sînt îndeplinite următoarele condiții:

$$(4.47)\qquad \begin{cases} C=\sum\limits_{i=1}^{n} A_{ai} l_i \rightarrow min \\ A_{ai}^{min} \leqslant A_{ai} \leqslant A_{ai}^{max} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(A_i) \leqslant f_0, \end{cases}$$

unde $\varphi(A_i)$ este funcția flexibilității, care pentru grinda considerată este funcție de parametrul de optimizare A_i și se scrie

$$\varphi(A_i)=\frac{1}{\rho_{1i}}-\frac{1}{\rho_{2i}}+\frac{1}{\rho_{3i}}; \qquad \rho_i=\frac{M_i}{R_i},$$

cauzată de întreaga încărcare, încărcarea de scurtă durată și încărcarea de lungă durată. R_i este caracteristica de rigiditate.

Din inegalitatea (4.47), secțiunea minimă a armăturii se deduce

$$(4.48)\qquad A_{ai}^{min}=max\left\{A_{a,i}^{rezist},\ A_{a,i}^{fisură},\ A_{a,i}^{min}\right\}.$$

Problema poate fi rezolvată folosind optimizarea secvențială cînd stabilirea armăturii din fiecare sector este un proces cu mai multe etape de decizie optimă.

Soluția optimă în etapa a k-a se determină prin următoarea ecuație funcțională

$$(4.49)\qquad \begin{cases} C_k(f_k)=\min\limits_{\{A_{a,k}\}} \{A_{ak} l_k - C_{k-1}[f_k-\varphi(A_{ak})]\} \\ \text{față de restricțiile:} \\ \qquad 0 \leqslant f_k \leqslant f_0 \\ A_{a,k}^{min} \leqslant A_{a,k} \leqslant A_{a,k}^{max} \\ \varphi(A_{a,k}) \leqslant f_k, \end{cases}$$

unde f_k este partea resursei distribuită în etapa a k-a. După n etape de rezolvare se obține valoarea funcției scop și valorile $A_{a,i}$ în fiecare sector, în condițiile de îndeplinire a restricțiilor de rezistența și fisurare [159].

Scanned with OKEN Scanner

4.6.5. GRINDA CONTINUĂ ÎN DOMENIUL ELASTO-PLASTIC

La construcțiile static nedeterminate eforturile din secțiuni depind de raportul rigidităților elementelor construcției. În stadiul echilibrului limită este posibilă redistribuirea eforturilor.

Proiectarea optimă după prima stare limită se bazează pe teorema statică a echilibrului limită, în cadrul căreia se afirmă că nu va avea loc capotarea dacă sînt îndeplinite ecuațiile echilibrului, iar eforturile din toate secțiunile nu depășesc pe cele limită.

Modelul fizic al betonului armat se aproximează cu al corpului elasto-plastic, acceptat de marea majoritate a tehnicienilor.

Printr-o construcție optimă se înțelege o asemenea structură capabilă să suporte în stadiul plastic de lucru încărcările date și să aibe un cost minim. Admițînd costul elementului proporțional cu momentul limită și lungimea elementului, funcția scop se scrie

$$\Sigma M_i^{lim} l_i \rightarrow min. \tag{4.50}$$

Costul unei asemenea construcții va fi limita superioară a costului real optim, deoarece are loc o deviere de la variantă optimă prin linearizarea funcției scop.

Pentru schema geometrică din fig. 4.24 [8, 159], modelul matematic se scrie :

$$2M_1^{lim} + 2M_2^{lim} \rightarrow min$$

$$M_1 - 2M_2 + M_3 + 2 = 0$$

$$M_3 - 2M_4 + 3 = 0$$

$$-M_1^{lim} \leqslant M_1 \leqslant M_1^{lim}; \quad -M_1^{lim} \leqslant M_3 \leqslant M_1^{lim}$$

$$-M_1^{lim} \leqslant M_2 \leqslant M_1^{lim}; \quad -M_2^{lim} \leqslant M_3 \leqslant M_2^{lim}$$

$$-M_2^{lim} \leqslant M_4 \leqslant M_2^{lim}.$$

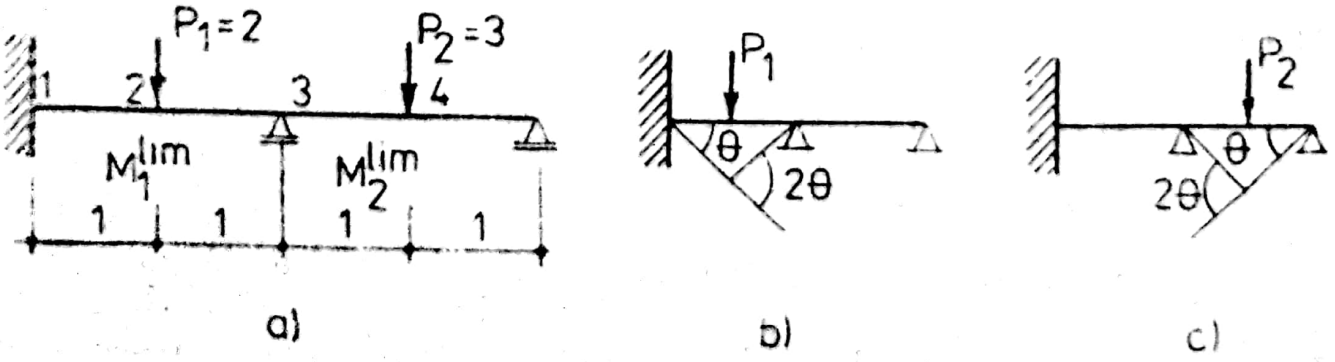


Fig. 4.24.

Soluția optimă se obține cu algoritmul simplex și constă din valorile :

$$M_1=-0{,}5\ ;\quad M_2=0{,}5\ ;\quad M_3=-0{,}5\ ;\quad M_4=1{,}25.$$

4.6.6. GRINDĂ CU SECȚIUNE VARIABILĂ

Tratarea acestei probleme se începe de la grinda cu secțiune constantă și diagramă de momente încovoietoare precizată. Etapa următoare completează diagrama momentelor încovoietoare cu acela provenit din greutatea proprie. În această fază se împarte grinda în n sectoare. Pentru fiecare sector înălțimea grinzii și secțiunea armăturii se consideră constante, ceea ce permite formularea modelului [159] : să se determine A_i și h_i $(i=\overline{1,\ n})$ pentru a fi îndeplinite următoarele restricții

$$\text{(4.51)}\qquad \begin{cases} C=\Sigma\,(C_a A_{ai}+C_o A_{bi})\,l_i \rightarrow min \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi\,(A_i\ h_i)\leqslant f_0, \end{cases}$$

$$\text{(4.52)}\qquad \begin{cases} M_{calc}\leqslant M_{intern} \\ a_{Ti}\leqslant [a] \\ A_i^{min}\leqslant A_i\leqslant A_i^{max} \\ h_i^{min}\leqslant h_i\leqslant h_i^{max}, \end{cases}$$

unde : h_i este înălțimea sectorului i, a_{Ti} lățimea deschiderii fisurii în secțiunea i.

În acest model este necesară varierea a doi parametri. Pentru a putea folosi modelul extremal secvențial se discută săgeata. Astfel se acceptă că săgeata sectorului k, f_k este o parte a săgeții totale f_m. Atunci este necesar să se aleagă asemenea valori h_k și A_k care ar corespunde inegalităților (4.45) și condiției

$$\text{(4.53)}\qquad \varphi\,(A_k,\ h_k)=f_k\pm\varepsilon.$$

Scanned with OKEN Scanner

Mulțimea valorilor A, h trebuie să corespundă condiției (4.46), cu un ε mic ales.

Dintre valorile acestei mulțimi se extrag A_k și h_k, față de care costul materialelor în sectorul k ar fi minim. Partea rămasă a resursei $f_k - f_m$ se distribuie optim între sectoarele precedente. Modelul problemei capătă expresia :

$$(4.54) \qquad \begin{cases} C_k(f_k) = \min\limits_{\{f_k,\, h_k\}} [C(A_k, h_k) + C_{k-1}(f_k - f_m)] \\ 0 \leqslant f_m \leqslant f_k \\ 0 \leqslant f_k \leqslant f_0. \end{cases}$$

4.6.7. GRINDĂ-PERETE

Grinda perete din fig. 4.25 se înlocuiește cu o grindă cu zăbrele ale cărei bare formează o rețea pătrată (observația 1.4). Se va căuta armătura repartizată pe direcțiile acțiunii eforturilor de întindere în ferme de aproximare. În felul acesta problema determinării armăturii se reduce la căutarea grinzii cu zăbrele, avînd un număr

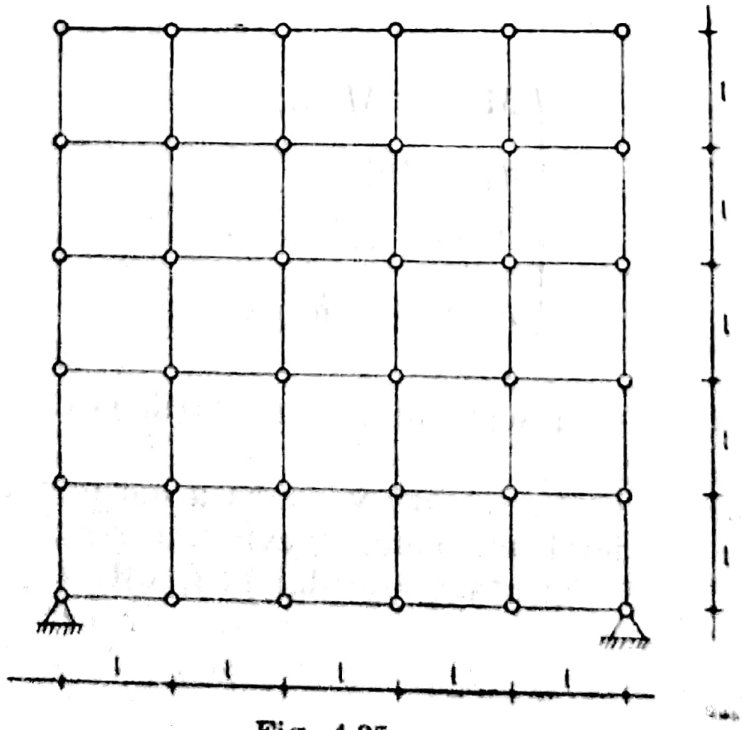


Fig. 4.25.

Scanned with OKEN Scanner

minim de bare întinse. Pentru aceasta sînt necesare următoarele supoziții: materialul barelor întinse este oțel de modul de elasticitate E_0 și rezistență de calcul R_{0L}, celelalte bare sînt din beton cu modul de elasticitate E_b și rezistență la compresiune R_b; barele care nu intră în sistemul optim, în sensul indicat, pot prelua numai eforturi de compresiune (bare zero). Suprafețele secțiunilor transversale a tuturor barelor comprimate și zero sînt identice.

Modelul matematic al problemei se scrie

$$G=\sum_{i=1}^{k} A_i l_i \rightarrow min$$

$$R_b \cdot A_0 \leqslant N_i=\sum_{j}^{m} N_{ij}X_j+N_{ip} \leqslant RA_i \qquad i=\overline{1,\ m} \tag{4.55}$$

$$0{,}5\sqrt{2}R_b A_0 \leqslant N_i=\Sigma N_{ij}X_j+N_{ip} \leqslant RA_i,$$

unde: k este numărul barelor întinse, A_0 este suprafața secțiunii transversale a barelor orizontale și verticale comprimate și a barelor zero, A_i este aria secțiunii transversale a barei întinse de ordinul i; m este numărul total de bare în fermă, n gradul de nedeterminare statică.

Rezolvarea completă numerică a unor exemple simple se poate consulta în [75].

4.6.8. CADRE STATIC DETERMINATE

La sistemele static determinate, calculul la starea limită de rezistență, ca și lățimea deschiderii fisurilor depinde de eforturile din secțiuni. Calculul eforturilor nu depinde de caracteristicile secțiunii elementelor. În consecință, costul minim al unui cadru static determinat se compune din costul diferitelor sectoare ale cadrului. Aceasta conduce la necesitatea stabilirii de caracteristici optime diferitelor sectoare ale cadrului. În acest fel se poate construi pentru cadrul static determinat epura optimă a consumului de material.

Din activitatea practică, barele cadrelor au în general formă dreptunghiulară cu o variație liniară a înălțimii secțiunii, fig. 4.26. Geometria cadrului din fig. 4.26 este determinată dacă sînt fixate valorile h_r, h_s (din condiția preluării forței tăietoare), precum și parametrii K, Z.

Scanned with OKEN Scanner

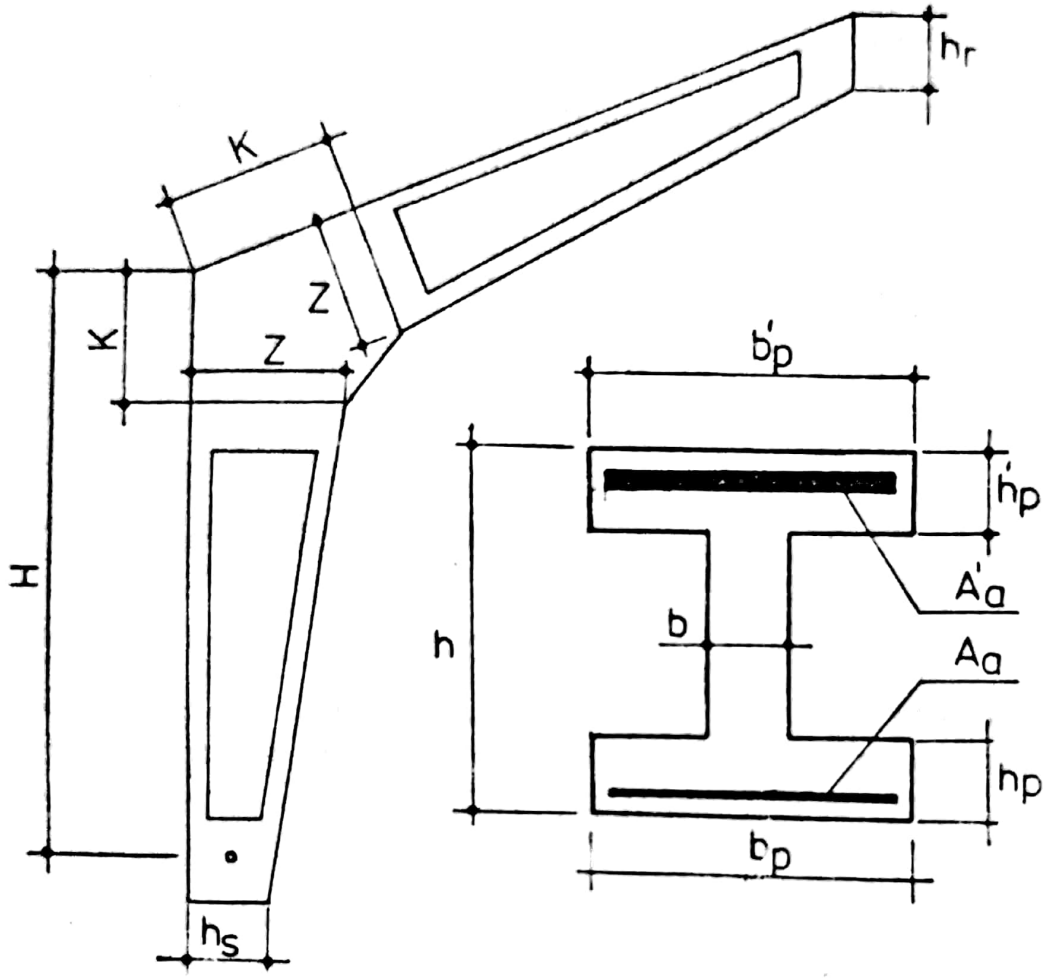


Fig. 4.26.

Într-o asemenea tratare, parametrul principal al proiectării este Z. Ceilalţi parametri geometrici b_p, b'_p, h_p, h'_p, b, la fel ca la grinzile din beton armat, conduc la un cost minim cu cît ei au valori mai mici. De aceea ei vor fi stabiliţi la valorile minime dictate de condiţii tehnologice, transport şi execuţie. Astfel, problema se reduce la aflarea unei variabile Z, care determină proiectul optim al construcţiei.

4.6.9. CADRE STATIC NEDETERMINATE

Problema proiectării cadrelor static nedeterminate se face în cele ce urmează admiţînd secţiunile elementelor cadrului ca fiind precizate şi se caută epura optimă a armăturii cadrului în ipoteza

proporționalității costului elementelor cadrului cu momentul limită M_0. Criteriul optimizării va exprima costul total al armăturii.

Se consideră un cadru de n ori static nedeterminat. Se propun valorile legăturilor suplimentare, de exemplu, momentele încovoietoare în n noduri M_i $(i=\overline{1, n})$. Aceasta înseamnă alegerea unuia din sistemele principale posibile pentru aflarea cîmpurilor static admisibile ale eforturilor. Într-adevăr, prin propunerea celor n momente nodale construcția poate fi examinată ca static determinată acționată de nu sistem de încărcări și momente M_i. Cunoscînd eforturile în fiecare secțiune și forma secțiunii transversale, prin condiția echirezistenței, se poate trece la analiza consumului armăturii. Distribuirea armăturii de volum V_a corespunzător unui cîmp oarecare admis de eforturi se va numi distribuție admisă. Deoarece încărcării limită îi corespund cîteva cîmpuri static admisibile, în condiția de echirezistență, încărcării limită îi corespund cîteva distribuiri admise ale armăturii (reciproca nu este adevărată). Se poate arăta că [159] atunci cînd încărcarea exterioară este precizată, distribuirii admise a armăturii de volum V_a în condiția de echirezistență îi corespunde un cîmp unic static admis al eforturilor.

Modelul matematic al problemei se prezintă sub forma, să se găsească valorile M_i $(i=\overline{1, n})$ încît să optimizeze funcția

$$V_a=\sum_{k=1}^{N} V_{ka}(M_k, N_k)\to min, \tag{4.56}$$

în condițiile

$$\begin{cases} \Phi_k(M_k, N_k)\leqslant 0 \\ \theta_k(M_k)\leqslant 0 \\ M_k-\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i(M_k)=0 \\ N_k-\sum\limits_{i=1}^{n}\psi_i(M_i)=0. \end{cases} \tag{4.57}$$

$V_{ak}=A_{ka}\Delta l_k$ este volumul armăturii sectorului k, de lungime Δl_k; N este numărul tuturor secțiunilor, M_k, N_k este momentul încovoietor și forța axială în secțiunea k.

Prima restricție din (4.57) corespunde condiției de rezistență și are forma

$$M_k+N_k\frac{h_0-a'}{2}-N_kh_0-A_{ak}R_ah_0+R'_aA'_aa'+\frac{(R_aA_{ak}-R'_aA'_{ak}+N_k)^2}{2bR_b}\leqslant 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

A 2-a restricție din (4.57) reprezintă înălțimea zonei comprimate a betonului și poate fi exprimată astfel:

$$M_k + N_k \frac{h_0 - a'}{2} - R_a A_a (h_0 - a) - \alpha R_b b h_0^2 \leqslant 0. \tag{4.58}$$

α depinzînd de marca betonului.

Restricțiile 3 și 4 din (4.57) sînt ecuațiile de echilibru care exprimă eforturile din secțiune în raport cu necunoscutele suplimentare și cu încărcările.

Problema formulată astfel este neliniară și reprezintă o problemă convexă, ceea ce simplifică mult rezolvarea ei.

4.7. PROIECTAREA OPTIMALĂ FOLOSIND MAI MULTE CRITERII DE OPTIMIZARE

În realitate, majoritatea problemelor proiectării construcțiilor au ca bază de discuție nu unul, ci cîteva criterii contradictorii de eficiență (greutate minimă, siguranță, longevitate, volum minim de execuție și montaj, cost minim etc.). Soluția obținută pe baza unui criteriu poate fi neoptimă în raport cu alte criterii.

Din punct de vedere formal poate fi realizată o tratare metodologică generală a problemei de optimizare folosind tehnica sistemelor extremale policriteriale.

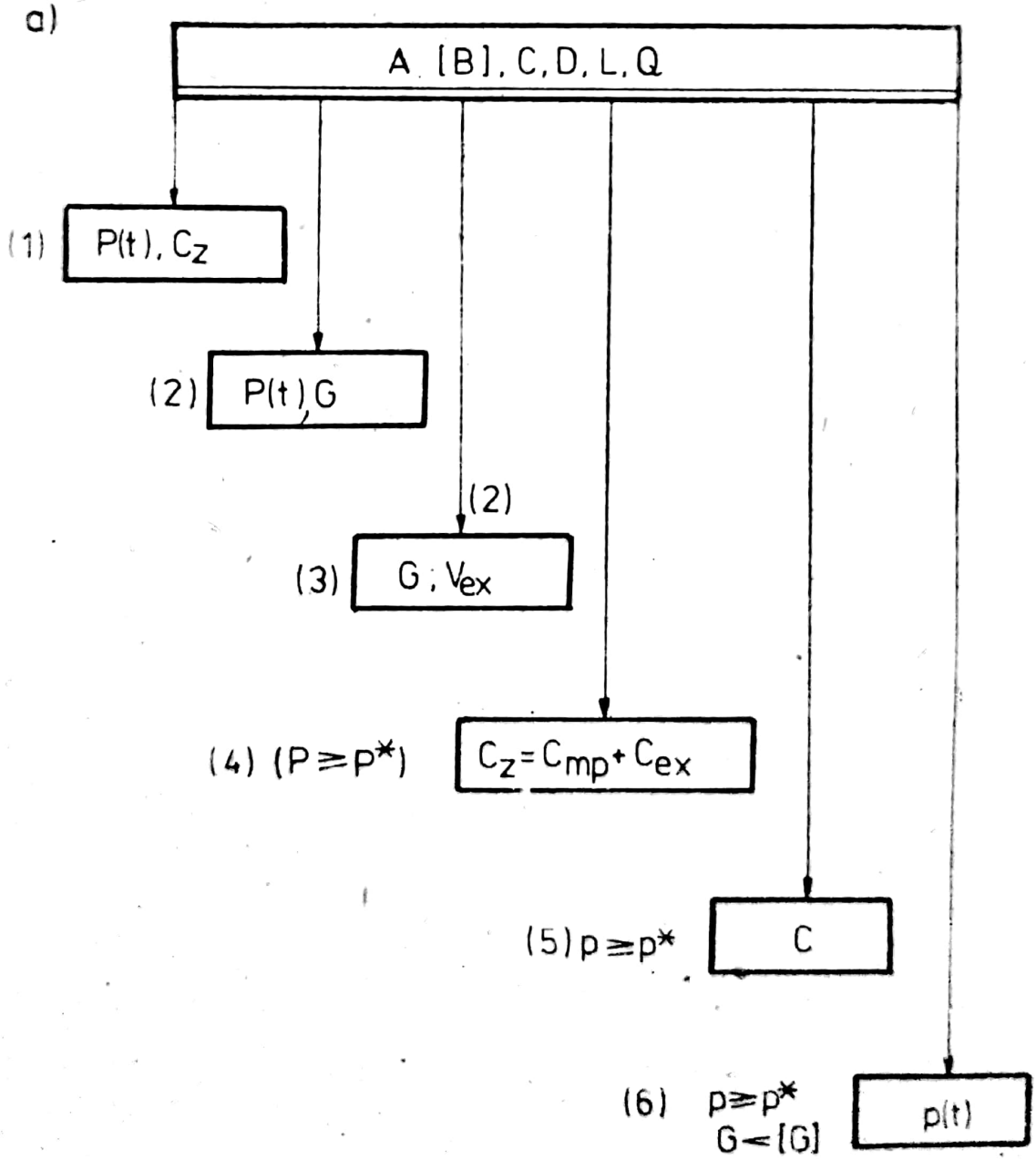
Dificultățile majore sînt legate nu atît de folosirea aparatului matematic al optimizării, cît de alegerea criteriilor și argumentarea unei soluții judicioase de compromis. Pentru construcții, indicatorii de eficiență folosiți curent sînt: siguranța și longevitatea, greutatea construcției, volumul manoperei de execuție, costul uzinal, costul în lucru, volumul lucrărilor de montaj, termenul de predare etc.

Tratarea problemei proiectării optimale în construcții sub forma vectorului de eficiență poate fi parcursă cu ajutorul schemei din fig. 4.27 [77].

În fig. 4.27 notațiile corespund la: A — tipul construcției, B — schema și structura construcției, C — materialul, D — forma

Scanned with OKEN Scanner

secțiunilor transversale a elementelor de construcții, L — deschiderea, Q — încărcarea, G — greutatea construcției, V_{ex} — volumul de muncă necesar execuției, V_m — volumul de muncă necesar montajului, C_z — costul uzinal, C_L — costul construcției în lucru, C_E — cheltuieli de echivalare, $P(t)$ — siguranța construcției examinată la nivelul proceselor aleatoare, P^* — siguranță normată, $Cm \cdot p$ — costul materialelor principale, $C\,ex$ — costul execuției.



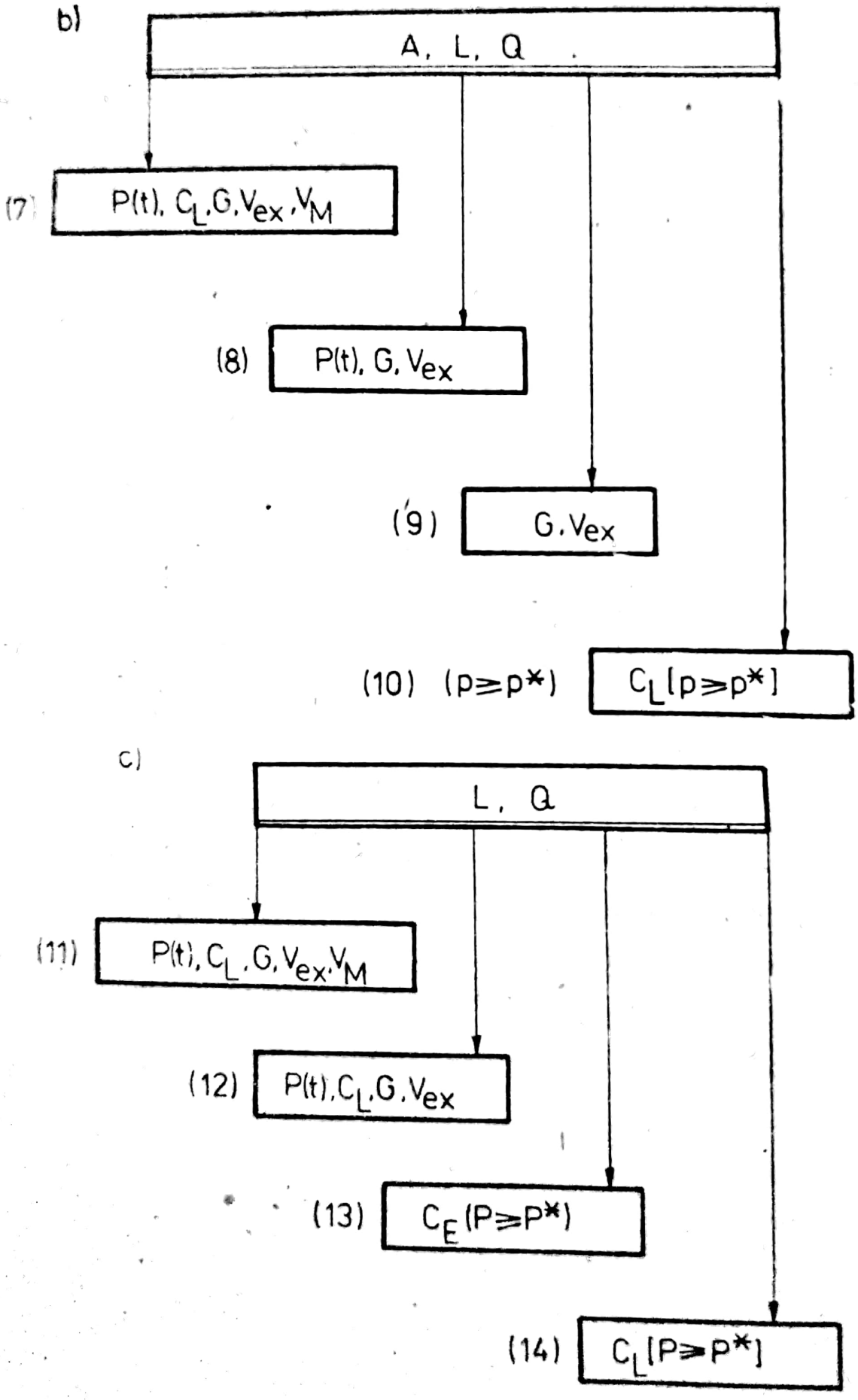


Fig. 4.27.

Scanned with OKEN Scanner

Tratările (3 ÷ 6), (9), (10), (13), (14) promovează unul din indicatorii de optimizare în clasa restricțiilor. În acest caz se obțin, sisteme extremale monocriteriale corespunzător formulărilor (4 ÷ 6) (10), (14).

Pentru exemplul din fig. 4.28, în [76] se prezintă modelul matematic al optimizării policriteriale sub forma

$$F^0 = 0^{-1}\{opt\,[V(F)]\}, \quad F \in F^*, \tag{4.59}$$

unde : F este aria secțiunii transversale determinată pe o mulțime F^*, $V(v_1, v_2)$ — vectorul eficienței pentru încărcarea P_I și P_{II}.

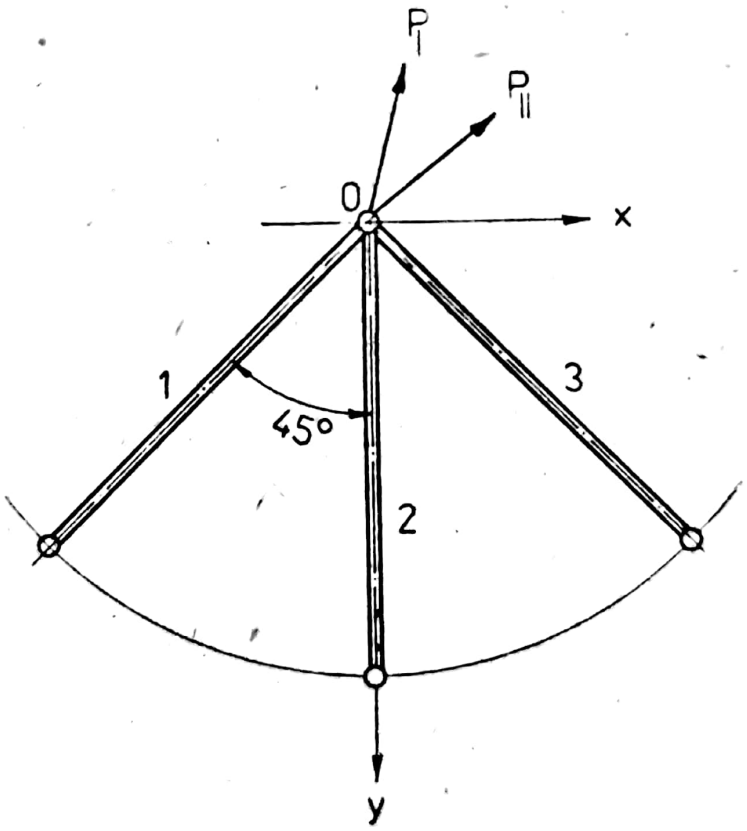


Fig. 4.28.

Pentru un sistem de bare cu secțiunile transversale propuse ca și configurații, în [107] se prezintă modelul și soluția problemei luînd drept componente ale vectorului de eficiență minimul greutății și minimul volumului de muncă necesar executării construcției.

4.8. EXPERIENȚA INGINEREASCĂ ȘI ALEGEREA METODELOR OPTIMIZĂRII

Trecerea la probleme mai complicate de optimizare a elementelor de construcții este însoțită de majorarea numărului variabilelor de proiectare. Procesul de optimizare nu dă efectul așteptat din cauza numărului mare de variante supuse trierii.

Uneori este posibilă obținerea unor soluții optime locale sau a unor soluții false dacă problema este neconvexă.

Principiul optimizării pe etape a sistemelor complexe permite împărțirea problemei într-o serie de probleme mai simple. În cadrul fiecărei subprobleme se impune folosirea acelui algoritm care corespunde cel mai complet specificului problemei de rezolvat.

Dar și la folosirea metodei optimizării secvențiale soluția este laborioasă și se obține anevoios.

Analiza rezolvării unor serii de probleme a arătat că la folosirea diferitelor metode de optimizare nu se iau în seamă considerentele bazate pe experiența inginerească care ar putea face cercetarea mai rațională.

Un exemplu este concludent în această privință. Astfel, la ieșirea pe limitele domeniului admis în cadrul violării uneia dintre restricțiile folosite este necesar să se realizeze o mișcare în interiorul domeniului admis după o lege oarecare, modificînd o grupă oarecare a variabilelor de proiectare.

Determinarea acelor variabile de proiectare a căror modificare este cea mai rațională se poate opera fie prin pași de probă pe toate variabilele, fie folosind anumiți parametri obținuți prin procedee stochastice.

În general, inginerul știe de regulă care este parametrul ce trebuie afectat pentru îndeplinirea limitării tulburate.

Astfel, dacă se violează restricția privind condiția de forfecare, la secțiunea dublu T a unei bare de oțel se știe dinainte că rațională este majorarea înălțimii inimii.

Considerentele expuse mai sus evidențiază necesitatea includerii în metodele de optimizare a constatărilor inginerești și a celor logice bazate pe experiența inginerească care vor permite să se restrîngă considerabil domeniul căutării valorii optime.

În metodele existente de optimizare pentru determinarea amplasării punctului curent de cercetare, precum și a direcției mișcării de-a lungul limitei domeniului admis este necesar de fiecare dată să se calculeze toate restricțiile.

Scanned with OKEN Scanner

Experienţă inginerească arată că la violarea unor restricţii nu are rost calculul şi a celorlaltor limitări.

Introducerea cunoştinţelor inginereşti despre caracteristicile algoritmului de optimizare poate să orienteze cercetarea pe făgaşul necesar şi în consecinţă să reducă considerabil timpul cercetării.

În cele ce urmează se va numi metodă standard una dintre metodele optimizării.

Problema se reduce la aducerea cunoştinţelor inginereşti bazate pe experienţă la forma standard a metodei de optimizare pentru a avea posibilitatea de a fi incluse în programa standard a cercetării valorii optime.

În cele de mai jos se introduce noţiunea de matrice a influenţei $I_{m,n}$

$$
(4.60) \qquad I_{m,n} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{matrix} \end{array} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix};
$$

$$
(4.61) \qquad \beta_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij},
$$

în care linile corespund numărului m al variabilelor care pot fi schimbate, iar cele n coloane — numărul restricţiilor.

σ_j este funcţia a j-a a restricţiilor (de obicei tensiuni) care apar sub forma

$$
(4.62) \qquad \sigma_j - [\sigma_j] \leqslant 0,
$$

unde: $[\sigma_j]$ este valoarea limită faţă de care punctul curent al cercetării se află pe limita domeniului; α_{ij} este coeficientul influenţei care caracterizează influenţa parametrului i asupra limitării j. El poate avea valorile 0 sau 1.

Se numeşte funcţie de penalizare P_j^s a restricţiei σ_j

$$
(4.63) \qquad P_j^s = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \sigma_j - [\sigma_j] \leqslant 0 \\ \sigma_j - [\sigma_j], & \text{dacă } \sigma_j - [\sigma_j] > 0. \end{cases}
$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se ştie că micşorarea valorii lui P_j^s depinde în special de modificarea variabilei X_r, atunci $\alpha_{rj}=1$, iar celelate $\alpha_{ij}=0$. Dacă micşorarea valorii lui P_j^s depinde de modificarea cîtorva variabile, atunci coeficienţii corespunzători acestor parametri sînt egali cu 1 ; $\alpha_{gj}=1$.

Variabilele care influenţează valoarea lui P_j^s se vor numi în continuare variabile esenţiale pentru restricţia σ_j.

β_j constă din suma elementelor coloanei a j-a a matricei de influenţă, putînd avea valorile :

$\beta_j=0$ în cazul în care pentru îndeplinirea restricţiei σ_j trebuie schimbate toate variabilele.

$\beta_j=1$ cînd se modifică numai un singur parametru pentru rezolvarea restricţiei j ($\alpha_{ij}=1$).

$\beta_j>1$ cînd se modifică un set de variabile pentru care $\alpha_{ij}=1$.

Schema generală a optimizării folosind influenţa experienţei inginereşti înregistrează următoarele secvenţe :

Cu ajutorul metodei standard pentru optimizarea construcţiilor se efectuează coborîrea pe limita domeniului soluţiilor admisibile. Punctul iniţial al cercetării X^0 trebuie să aparţină domeniului admis. În fiecare punct al cercetării X^k se verifică condiţia (4.62) pentru fiecare din cele n restricţii. Dacă una dintre restricţii nu este îndeplinită $\beta_h=0$, atunci se examinează coloana a h-a a matricei de influenţă $I_{m,n}$. Dacă toate elementele coloanei sînt nule ($\beta_h=0$), atunci mişcarea de-a lungul limitei se realizează în conformitate cu algoritmul optimizării (exemplu, în zig-zag cu determinarea funcţiilor de penalizare pentru toate restricţiile după metoda direcţiilor posibile etc.). Totodată, valorile α_{ij} nu se iau în considerare pentru coloanele ulterioare ($j>h$). Dacă $\beta_h=1$, atunci calculul celorlaltor restricţii nu se efectuează, ci se afectează parametrul X_i, pentru care $\alpha_i=1$. În sfîrşit, dacă $\beta_h>1$ se produce modificarea numai a parametrilor esenţiali în conformitate cu metoda standard de optimizare.

Folosirea matricei de influenţă a experienţei inginereşti pentru o secţiune dublu T se exemplifică în [96], de asemenea a secţiunilor unui cadru din oţel.

În concluzie, experienţa inginerului în proiectarea optimală a construcţiilor poate fi cuantificată şi prinsă analitic în algoritmul de optimizare, ceea ce se concretizează în reducerea timpului de cercetare şi obţinerea unor soluţii de optim local pentru problemele multiextremale.

Scanned with OKEN Scanner

APENDIX

(1) **Mulţimi indexate.** Se consideră o funcţie $\varphi : I \to A$ (I o mulţime a indicilor, A o mulţime de elemente), care face ca fiecărui indice $i \in I$ să-i corespundă elementul $x_i \in A$. Se scrie $\{x_i\}_{i \in I}$. Dacă I este mulţimea N a numerelor naturale, mulţimea indexată $\{x_i\}_{i \in N}$ este un şir simplu. Dacă I este $N^2 = N \times N$, atunci mulţimea indexată este un şir dublu.

(2) **Marginile unei mulţimi.** Un număr M (m) se numeşte margine superioară (inferioară) a unei mulţimi A dacă este cel mai mic majorant (mare minorant) al mulţimii A. Se notează $M = \sup A = \sup\limits_{x \in A} x$; $m = \inf A = \inf\limits_{x \in A} x$.

(3) **Funcţii mărginite.** Fie $f : E \to R$ şi $A \subset E$. Marginea inferioară (superioară) a mulţimii $f(A)$ se numeşte margine inferioară (superioară) a funcţiei f pe mulţimea A şi se notează :

$$\inf_{x \in A} f(x), \quad (\sup_{x \in A} f(x)).$$

Proprietăţi :

a) $\inf\limits_{x \in E} f(x) = -\sup\limits_{x \in E} (-f(x))$.

b) Dacă $f : E \to R$ este mărginită pe $A \subset E$ şi dacă $B \subset A$, atunci avem :

$$\inf_{x \in B} f(x) \geqslant \inf_{x \in A} f(x) \text{ şi } \sup_{x \in B} f(x) \leqslant \sup_{x \in A} f(x).$$

c) Dacă funcţiile f şi $g : E \to R$ sînt mărginite, atunci

$$\inf_{x \in E} [f(x) + g(x)] \geqslant \inf_{x \in E} f(x) + \inf_{x \in E} g(x)$$

$$\sup_{x \in E} [f(x) + g(x)] \leqslant \sup_{x \in E} f(x) + \sup_{x \in E} g(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

(4) **Majorarea unei funcţii pe o mulţime.** Se spune că funcţia f este majoranta funcţiei g pe mulţimea A dacă $f(x)<g(x)$, $x \in A$.

(5) Pentru o funcţie vectorială $f: R^n \to R^m$, numim **gradient** în punctul x^0 matricea :

$$\nabla f(x^0) = \left[\frac{f_i}{x_j}(x^0)\right]_{min} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \ldots\ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \ldots\ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{bmatrix}.$$

(6) Matricea $Hf(x^0) = \left[\frac{\partial^2 f}{x_i x_j}(x^0)\right]_{i,j=1\div n} = \nabla(\nabla_f)(x^0)$

se numeşte **matrice hessiană** a funcţiei f în x^0.

(7) **Funcţie semicontinuă superior.** Se spune că funcţia f este semicontinuă superior în punctul x_0 dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon>0$ putem găsi $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încît pentru $|x-x_0| \leqslant \delta(\varepsilon)$ să avem $f(x) \leqslant \leqslant f(x_0)+\varepsilon$.

(8) **Mulţime convexă.** Mulţimea $A \subset R$ se numeşte convexă dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$ şi $0<\alpha<1$ avem $x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in A$.

(9) **Funcţii convexe.** Fie $A \subset R^n$ (A-convexă) şi $f: A \to R$.

a) f este convexă pe A dacă $(\forall)\ x_1, x_2 \in A$, $0<\alpha<1$,

$$f[\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2] \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

b) f este q-convexă pe A dacă $(\forall)\ \alpha \in R$ mulţimea

$$A_\alpha = \{x \in A : f(x) \leqslant \alpha\}$$

este convexă.

(10) **Funcţii convex-concave.** Fie X şi U spaţii liniare şi $A \subset X$, $B \subset U$ mulţimi convexe ; $f: A \times B \to R$ este convex-concavă pe $A \times B$ dacă :

a) $x \to f(x, u)$ este convexă pe A pentru fiecare $u \in B$,

b) $u \to f(x, u)$ este concavă pe B pentru fiecare $x \in A$.

(11) **Proprietăţi ale funcţiilor convexe.**

a) Dacă $A \subset R^n$ şi $f: A \to R$ este q—convexă (convexă), atunci f are această proprietate şi pe $B \subset R^n$ oricare ar fi $B \subset A$.

b) Dacă f este q—convexă (convexă) pe $A \subset R^n$, atunci orice punct de maxim local a lui f pe A aparţine frontierei relative a lui A.

Scanned with OKEN Scanner

c) Dacă f este convexă diferențiabilă pe A, atunci

$$\tilde{x} \in A, \ \nabla f(\tilde{x}) = 0 \Rightarrow f(\tilde{x}) = \min_{x \in A} f(x).$$

d) Dacă f este convexă pe $A \subset R^n$, atunci

d_1) f este mărginită pe orice mulțime compactă $B \subset \operatorname{int} A$,

d_2) f este mărginită inferior pe orice mulțime mărginită $B \subset A$.

e) Orice combinație liniară (cu coeficienți pozitivi) de funcții convexe pe $A \subset R^n$ este o funcție convexă pe A.

f) Dacă f este convexă pe A, atunci

f_1) f este continuă pe int A.

f_2) Dacă $x_0 \in F_r A$, atunci

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \leqslant f(x_0), \text{ dacă } x_0 \in A$$

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) > -\infty, \text{ dacă } x_0 \notin A.$$

(12) **Teorema de separabilitate a hiperplanelor.** Fie B un spațiu Banach și $A \subset B$ o submulțime convexă a sa. Dacă A conține punctele interioare, iar $p \in B$ nu este punct interior a lui A, atunci există o funcțională liniară mărginită f definită pe B astfel încît $f(z) \leqslant f(p)$, $(\forall)\ z \in A$.

(13) **Subdiferențiala.** Fie B un spațiu Banach real de normă $\|\cdot\|$ și B^* dualul său, $\varphi : B \to [-\infty, +\infty]$ o funcție convexă. Se numește subdiferențiala lui φ operatorul definit de la B la B^* prin relația:

$$\partial\varphi = \{[x, x^*] \in B \times B^* : \varphi(x) - \varphi(u) \leqslant (x - u, x^*), \ (\forall)\ u \in B\}.$$

Orice element $x^* \in \partial\varphi(x)$ se numește subgradient al funcției φ în punctul x.

(14) **Grafe.** Se consideră o mulțime X și o aplicație multivocă Γ a lui X în X. Perechea $G = (X, \Gamma)$ constituie un graf în sensul lui König.

Subgraf. Un subgraf al lui G este prin definiție graful (A, Γ_A) unde: $A \subset X$ și $(\forall)\ X_i$, $\Gamma_A X_i = (\Gamma X_i) \cap A$.

(15) **Graf complet.** Un graf este complet dacă:

$$(\forall) X, \ (\forall)\ Y : (X, Y) \notin U \Rightarrow (Y, X) \in U$$

Scanned with OKEN Scanner

Drum. Un drum este un şir $(u_1, u_2, \ldots)$ de arce astfel încît extremitatea terminală a fiecărui arc să coincidă cu extremitatea iniţială a arcului următor.

(16) **Graf tare conex.** Un graf este „tare conex" dacă $(\forall)$ X şi $(\forall)$ Y $(X \neq Y)$ există un drum de la X la Y.

(17) **Închiderea tranzitivă.** Fie graful $G=(X, \Gamma)$, aplicaţiile $\Gamma^2(X)=\Gamma(\Gamma(X))$ $\Gamma^3(X)=(\Gamma^2(X)$ etc. Închiderea tranzitivă a lui Γ este o aplicaţie $\tilde{\Gamma}$ definită prin

$$\tilde{\Gamma}(X)=\{X\} \cup \Gamma(X) \cup \ldots\ldots$$

(18) **Muchie.** Se numeşte „muchie" a unui graf $G=(X, U)$ o mulţime de două elemente X şi Y astfel încît:

$$(X, Y) \in U \text{ şi/sau } (Y, X) \in U, \ X \neq Y.$$

(19) **p-graf.** Dacă numărul de vîrfuri care ating o pereche oarecare de vîrfuri este inferior sau egal cu p, atunci se zice p-graf.

(20) **Număr ciclomatic.** Fie p-graful cu n vîrfuri, m muchii şi r componente conexe. Numărul ciclomatic este $\nu(G)=m-n+r$.

(21) **Arbore.** Se numeşte arbore un graf finit conex fără cicluri şi avînd cel puţin două vîrfuri.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. ABADIE, J. *Une methode arborescente pour les programmes nonlinéaires partiellement discrets*. RIRO, V—3, 1969.
2. AGGARWAL, S. P. *A Note on Quasiconvex Programming*. Metrica, 12, 1968.
3. AL-MAHAIDI, R. S., NILSON, A. H. *Coupled Shear Wall Analysis by Lagrange Multipliers*. J. S D., 1970.
4. ARIS, R. *Discrete Dynamic Programming An Introduction to the Optimization of Staged Processes*. New York, 1964.
5. ARORA, J. S., HAUG, Jr. E. J., RIM, K. *Optimal Design of Plane Frames*. J.S.D., ST. 10, 1976.
6. ARROW, K, J., HURWICZ, L., UZAWA, H. *Studies in Linear and Nonlinear Programming*. Stanford Univ. Press, 1968.
7. ATANASIU, M. *Mecanică*. Ed. didactică și pedagogică, București, 1973.
8. AVRAM, C., DEUTSCH, I., WEISZ-BIRNHOLZ, A. *Proiectarea economică a elementelor de construcții din beton armat*. Ed. Facla, Timișoara, 1979.
9. AGARD, J. *Les méthodes de simulation*. Dunod, Paris, 1968.
10. BARBU, V., PRECUPANU, TH. *Convexitate și optimizare în spații Banach*. Ed. Academiei R.S.R., București, 1975.
11. BALDIN, V. A., ILASIEVICI, S. A., BROUDE, B. M., BELISKI, G.E. *Nekotorie voprosî rașceta stalnih konstrucții po. predelinîm sostoianiem pervoi grup*. Stroi. Meh. i Rașc. Sooruj, 1, 1976.
12. BĂLAN, ȘT. PETCU, V. *Calculul structurilor în domeniul plastic — Optimizari*. Ed. Academiei R.S.R., București, 1979.
13. BENAYOUN, R, TERGNY, T. *Criteres multiples en programmation mathematique une solution dans le cas lineaire*. Revue Francaise d'Informatique et de Recherche Operationnelle, 3, 1969.
14. BENAYOUN, R., MONTGOLFIER, J., TERGNY, J., LARICHEV, O. *Linear Programming with Multiple Objective Functions. STEP Method (STEM)*. Mathematical Programming, 1, 1971.
15. BERGE, C. *Teoria grafurilor și aplicații*. Ed. tehnică. București, 1969.
16. BELLMAN, R. *Dnyamic Programming*. Princeton University Press, 1957.
17. BENJAMIN, J. E. *Probabilistic Structural Analisis and Des'gn*. J.S.D., vol. 94, ST. 7, 1968.
18. BELLMAN, R. E., DREYFUS, S. E. *Programare dinamică aplicată*. Ed. tehnică, București, 1967.
19. BIGELOW, R. H. GAJLORD, E. H. *Design of Steel for Minimum Weight*. Proc. ASCE, vol. 93, ST. 6, 1967.

Scanned with OKEN Scanner

43. DENNIS, J. B. *Mathematical Programming and Electrical Networks Technology*. Press and Wiley, New York, 1959.
44. DIMOIU, I. *Considerente privind folosirea principiului extremal în calculul structurilor*. A II-a Sesiune de comunicări ştiinţifice a tinerilor ingineri, Timişoara, 1974.
45. DIMOIU, I., LORINCZ, P. *Aspecte din calculul probabilistic al construcţiilor*. Simpozionul Matematica modernă aplicată la rezolvarea problemelor din industrie şi economie. Timişoara, iunie, 1978.
46. DIMOIU, I., CARABA, I., VUC, L. *O generalizare a metodelor de calcul a structurilor*. Sesiunea ştiinţifică dedicată celei de-a XXX-a aniversări a eliberării patriei şi Congresului al XI-lea al P.C.R., Timişoara, 1974.
47. DIMOIU, I., VUC, L. *Proiectarea construcţiilor de greutate şi cost minim avînd securitatea propusă*. Lucrările I — Conferinţe de construcţii metalice. Timişoara, oct., 1973.
48. DIMOIU, I. *Considerente privind optimizarea formei unei construcţii de greutate minimă*. A II-a sesiune de Comunicări ştiinţifice a tinerilor ingineri, 1974.
49. DINKELBACH, W. *Über einen Lösungsansatz zum Vectormaximumproblem*. M. Beckman and H. P. Künzider Unternehmensforschung Heute, Springer Verlag, 1971.
50. DINKELBACH, W. *Unternehinerische Entscheidungen bei mehrfacher Zielsetzung*. Zeitschriff für Betriebsw irtschaft, 32, 1962.
51. DOUTY, R. T. *Optimization of Light — Gage Gold — Formed Steel Shapes by Parametric Bandwith Construction*. Journal of Computers and Structures, Vol. 3, Pergamon Press. Inc. New York, 1973.
52. DORN, W. S., GREENBERG, H. J. *Linear Programming and Structures Carnegie*. Institute of Technology Pittsburgh. August, 1955.
53. DOBBS, M. W., FELTON, J. *Optimization of Truss Geometry*. J.S.D, vol. 95, 1969.
54. DRAGOMIRESCU, M., MALIŢA, M. *Programe neliniare*. Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1972.
55. DREYFUS, S. E. *Dynamic Programming and the Calculus of Variatons*. New York, London, Academic Press, 1965.
56. DUPUIS, G., PROBST, A. *Etude d'un structure elastique soumise a des conditions unilaterales*. Journal de Mecanique, 6, Nr. 1, 1967.
57. DUFFIN, R. I., PETERSON, E. L., ZENER, C. *Geometric Programming, Theory and Aplication*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.
58. DUMITRESCU, ŞT., DUMITRESCU, I., MARINOIU, V., FLOROVICI, M. *Aplicaţii inginereşti ale calculatoarelor*. Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1977.
59. ERINGEN, A. *Non linear Theory of Continuous Media*. Mc. Graw Hill., New York, 1962.
60. ELMAGHRABY, S. E. *Proiectarea sistemelor de producţie*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1968.
61. EKELAND, I. *Nonconvex Minimization Problems*. Bulletin of the American Mathematical Society, May 1979, vol. 1, Nr. 3.
62. FALK, J. E. *Lagrange Multiplices and Nonlinear Pragramming*, J Math. Anal. Appl., 19, 1967.
63. FIACCO, A. V., Mc. CORMICK, G. P. *Computational Algorithm for Sequential Uncontrained Minimization*. Technique for Nonlinear Programming Management. Sci., 10, 1964.

Scanned with OKEN Scanner

88. HUANG, S. C. *Note on the Mean-Square Strategy of Vector Valued Objective Funktion*. J. Opt. Th. Appl., 9, 1972.
89. HUARD, P. — *Tour d'horizon : Programmation non linear*. RIRO, nr. 1, 1971.
90. HUPFER, P. *Optimierung von Bankonstructionen V. E.B.* Verlag für Bauwesen, Berlin, 1970.
91. IONESCU, T. *Grafuri*. Aplicații vol. I, II, Ed. didactică și pedagogică, București, 1973.
92. IEGI, M. E. *Prilojenie teorii nadejnosti k reșeniiu extremlnih zadaci stroitelnoi mehaniki*. Trudi Talinskogo politehniceskogo instituta, 360, 1974.
93. JULIAN, O. G. *Synopsis of First Progress Report of the Committee on Factors of Safety*. J.S.D., Vol. 83, ST. 7, 1957.
94. JOHNSON, R. C. *Optimum Design of Mechanical Elements*. New York, 1961.
95. KAGANOV, V. L. *Metod poetapnoi optimizații adnoetajnih stalinih ram*. Stroi. Meh. i Rașc. Sooruj., 3, 1974.
96. KAGANOV, V. L., PRISTER, A. A. *Kreșeniiu zadaci optimalinogo proektirovania*. Stroi. Meh. i Rașc. Sooruj., 2, 1978.
97. KAHN, H. *Use of Different Monte Carlo Sampling Techniques*. John Wiley & Sons, New York, 1956.
98. KARLIN. S. *Mathematical Methods and Theory in Games and Economics*. vol. 1 Addison Wesley-Reading-Mass, 1959.
99. KAUFMANN, A., CRUON. R. *La programmation dynamique*. Paris, Dunod, 1965.
100. KELLEY, J. E. *The Cutting Plane Method for Solving Convex Problem*- Society for Industrial and Applied Mecf hnics Journal, vol. 8, 1970.
101. KICHER, T. P. *Optimum Design — Minimum Weigt Versus — Fully Stres sed* — J.S.D., vol. 92, 1966.
102. KIM, T. S. *Rasciot staticeski neopredelimih ferm naimenșego vesa*. Stroi. Meh. i Rașc. Sooruj ; 2, 1968.
103. KIRSCH, U., MOSES. F. *Decompozition in Optimum Structural Design*. J.S.D., 105, ST. 1, 1979.
104. KISSIUK, V. N. *Proiektirovanie adnomernih sistem minimatinogo vesa vipolnenih iz neodnorodnih materialov. Novie metodi rașcela stroitelinih konstrukții*. Stroiizdat, 1968.
105. KLINGER, A. *Improper Solutions of the Vektor Maximum Problem*. Operations Research, 15, 1967.
106. KNESER, H. *Sur un theoréme fondamental de la théorie des jeux*. C.R. Acad. Sci., Paris, 234, Nr. 25, 1952.
107. KUZNETOV. A. F. *Vibor naibolee rationalinogo classa stalei povișennoi procinosti dlia konstruktii promzdanii i soorujenii*. Promișlenoie Stroitelistvo, 6, 1973.
108. LANGE, O. *Optimalne decyzje-zasady programowania PWN*. Warszawa, 1964.
109. LASDON, L. S. *Teoria optimizării sistemelor mari*. Ed. tehnică, București, 1975.
110. LASALLE, J. P. *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*. Academic New York, 1961.
111. LESNIAK, Z. K. *Methoden der Optimierung von Konstructionen*. Verlag von Wilhelm Ernst & Sons,. 1970.
112. LEON, A. *A Classified Bibliograph on Optimization Recent Advances in Optimization*. Tehniques Editars Lavi D. and Vogl T.P., John Wiley & Sons Inc., New York, 1966.

Scanned with OKEN Scanner

188. WOLFE, P. *Metods of Nonlinear Programming*. Nonlinear Programming. J. Abadie ed. John Wiley & Sons, New York, 1967.
189. * * * *Problemî nadejnosti v stroitelinoi mehanike*. Materialî co vtoroi vses konferenţii, Vilnius, 1968.
190. * * * *An Introduction to Structural Optimization*. Ed. John Wiley & Sons, Waterloo, 1969.
191. * * * *Ordinateur IRIS-50. Programme SIMPLEXE*. Manuel d'Utilisation. Paris, 1972.
192. * * * *Ordinateur IRIS-50. SOUS-PROGRAMMES MATHÉMATIQUES*. Manuel d'Utilisation, Paris, 1972.
193. * * * *Ordinateur IRIS-50. Programme d'analyse POST-OPTIMALE*. Manuel d'Utilisation. Paris, 1972.
194. * * * Primul simpozion national. *Aplicaţii ale informaţiilor în proiectarea şi cercetarea de construcţii*. Sibiu. 1979.

Scanned with OKEN Scanner

MATHEMATIC MODELS IN CIVIL ENGINEERING

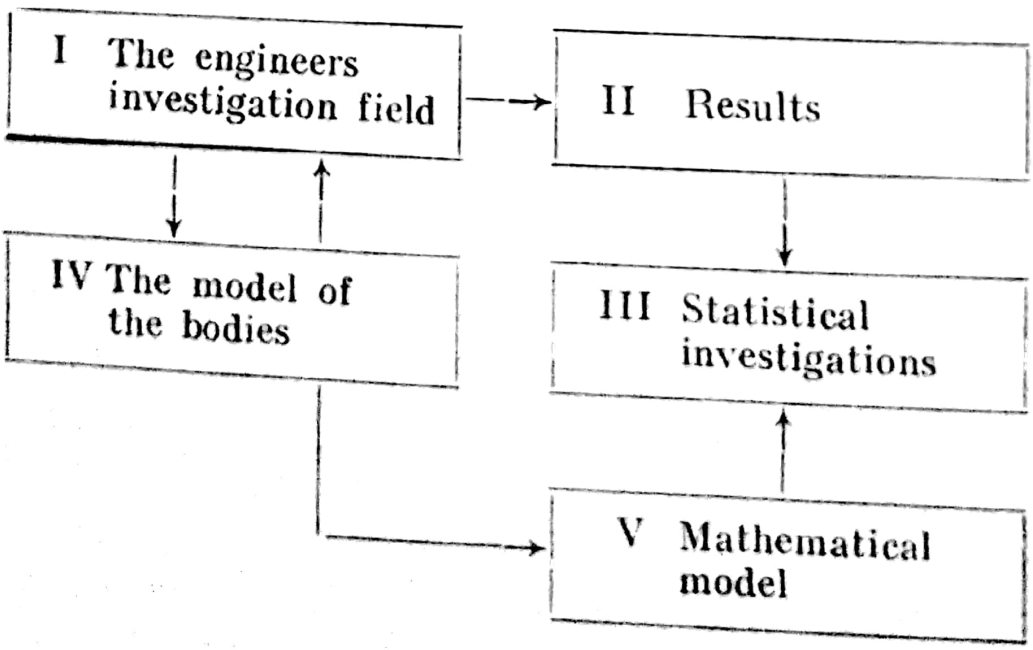
(ABSTRACT)

This work consist of the following chapters :

I. Material bodies systems.
II. Arbitrary extremal systems.
III. Extremal systems of bars.
IV. Optimum design.

In the prezent paper, the authors are intending to do a coherent analytical theory concerning the structural systems design an numerical or analogical simulation of the light structures systems.

The main location of the prezent work is done in the below diagram :



Scanned with OKEN Scanner

The usual method is guided on the line I—II—III Our work follows another line marked by I—IV—V.

The lst chepter define the models of the matter. So we can see :

a. The model of stiffned body.

b. The model of deformable body.

Due to the fact that most buildings are made up of jointed bars, the following mathematical system was defined on the orientated object :

$$\mathcal{S}(\bar{S}, M) = \mathcal{S}(\tilde{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu) M),$$

where $\tilde{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu)$ is the orientated system graph having α bar connections, β supports, γ bars, δ statistical loads in μ loading kinds. The tensional stady state of the structure is done by a mathematical model M. The stady state graph M is a diagram of the stiffned body case. On the deformable body case, M is discribed by the help of relations : equilibrium equations, geometrical relations and physical equations. Algebraic transformations of M can get the usual known methods of the civil engineering.

The 2nd chepter treats the general case of an arbitrary sistem (oriented object) where M is noted by $F(x(t), z(t), y(t)) = 0$. The performance function been defined, the optimum system is disscused as follows :

$$f(x(t), z(t)) \rightarrow optimum$$

$$f_j(x(t), z(t)) \{\geqslant, =, \leqslant\}, 0 \quad j = \overline{1, m}.$$

According to the nature of the system, the properties of M are disscused : So, we have got the below table :

	The system nature	
	Determinist	Stochastic
Analytic	Linear extremal system Non-linear extremal system	Stochastic extremal system
Analogic and aleatory	Monte Carlo Methods	Simulation

Thus, we can analyse some different extremal systems : an extremal convex system, a non-convex extremal system, a stochastic extremal system in the structural assembly. On the other hand, we may distinguish the non-structural assemblies that can be analyzed by the numerical or analogical simulation procedure. The case of a vector performance of the system is presented in the end of this chapter.

In the 3rd chapter, the set of equations connected to the orientated physical object is applied particularly to an arbitrary system of bars. So, the model M is written for the elastic body and the elastic-plastic body, respectively. The constrains f are considered in regard to the various nature of the problems : minimum weight system, equi-resistent systems, imposed security systems, predesigned weight and price, systems.

The 4th chapter is pointing out the fundamental elements of optimum design theory as well as the high role of modern computer in civil engineer designing. Further on, the optimum design of structure element or a subassembly (or even of the whole structure) was studied as an extremal system. The paragraphs 4.4.2—4.4.5 are using the common optimum criteria, that are performed frequently.

In this chapter, the optimum design is described in relation with one or more special criteria, based on actual exemples taken from the design practice of the steel structural elements or reinforced concrete components.

The accumulated engineering practice for desiging can diminish the effective work to find the optimum solution of the engineer's problem. In these connections, some remarks are done in the end of the 4-th chapter.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Prefață 5

Capitolul I

SISTEME DE CORPURI MATERIALE

1.1 Modele ale materiei 7
1.1.1. Modelul corpului rigid (CR) 9
1.1.2. Modelul corpului deformabil (CD) 9
1.2. Sisteme arbitrare de bare 10

Capitolul II

SISTEME EXTREMALE ARBITRARE

2.1. Sisteme extremale monocriteriale 28
2.1.1. Noțiuni fundamentale 28
2.1.2. Sisteme extremale convexe 39
2.1.3. Structura algebrică a algoritmilor de bază pentru sistemele extremale neliniare 53
2.1.4. Sisteme extremale neconvexe 68
2.1.5. Sisteme extremale stochastice 80
2.1.6. Simularea sistemelor extremale 85
2.2. Sisteme extremale policriteriale 92

Capitolul III

SISTEME EXTREMALE DIN BARE

3.1 Generalități 95
3.2 Sisteme extremale cu model elastic 96
3.2.1. Sisteme extremale spațiale 99
3.2.2. Sisteme extremale spațiale cu modelul liniar elastic 103
3.2.3. Sisteme extremale plane — modelul liniar elastic 107
3.3 Sisteme extremale cu model elasto-plastic 110
3.4. Sisteme cu greutate minimă 114
3.4.1. Generalități 114
3.4.2. Greutatea sistemelor echirezistente 116
3.4.3. Greutatea sistemelor cu model elasto-plastic 126
3.5. Sisteme extremale avînd siguranța impusă 134
3.5.1. Siguranța unui sistem 134
3.5.2. Sisteme cu greutate minimă și siguranță impusă 136
3.5.3. Siguranța unui sistem cu greutatea și preț de cost limitat 137

Scanned with OKEN Scanner

30

Capitolul IV

PROIECTARE OPTIMALĂ

4.1. Noţiuni fundamentale 139
4.2. Proiectarea construcţiilor 140
4.3. Rolul calculatorului electronic în activitatea de proiectare 147
4.4. Proiectare optimală pe baza unui singur criteriu de optimizare 150
4.4.1. Generalităţi 150
4.4.2. Criteriul costului minim 152
4.4.3. Criteriul greutăţii minime 155
4.4.4. Siguranţa construcţiilor şi criteriile de optimizare 156
4.4.5. Croirea optimă 158
4.5. Cîteva modele pentru construcţii metalice 159
4.5.1. Sortimentul profilelor laminate 159
4.5.2. Profile metalice sudate 161
4.5.3. Adaptarea secţiunii unei grinzi la configuraţia diagramei momentului încovoietor 163
4.5.4. Încărcarea maximă pentru un element precizat 172
4.5.5. Elemente de construcţii metalice solicitate de efort axial 173
4.5.6. Fermă static determinată 175
4.5.7. Cadru static nedeterminat 176
4.6. Cîteva modele pentru construcţii din beton armat 179
4.6.1. Grinzi din beton armat cu secţiune constantă .. 179
4.6.2. Grinda continuă calculată la starea limită de rezistenţă 180
4.6.3. Grinzi continue echirezistente 183
4.6.4. Construirea epurei optime a armăturii 184
4.6.5. Grinda continuă în domeniul elasto-plastic 186
4.6.6. Grindă cu secţiune variabilă 187
4.6.7. Grindă-perete 188
4.6.8. Cadre static determinate 189
4.6.9. Cadre static nedeterminate 190
4.7. Proiectarea optimală folosind mai multe criterii de optimizare 192
4.8. Experienţa inginerească şi alegerea metodelor optimizării 196
Apendix 199
Bibliografie 203
Abstract 212

Scanned with OKEN Scanner